Financial Research Journal

Print ISSN: 1024-8153

Online ISSN: 2423-5377

Interior Point Algorithm in Multi-objective Portfolio Optimization: GlueVaR Approach

Elaheh Goharnia
MSe., Department of Accounting and Financial Management, Faculty of Economics and Management and, Urmia University, Urmia, Iran. E-mail: st_el.goharnia@urmia.ac.ir

Gholamreza Mansourfar *
*Corresponding Author, Associate Prof., Department of Accounting and Financial Management, Faculty of Economics and Management and, Urmia University, Urmia, Iran. E-mail: g.mansourfar@urmia.ac.ir

Fahimeh Biglari
Assistant Prof., Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, Urmia University of Technology, Urmia, Iran. E-mail: beiglari.f@gmail.com

Abstract

Objective
Investors, in their pursuit to maximize expected returns, minimize risks in their stock portfolios, and achieve the desired benefits, require suitable methods and criteria to select stocks for their portfolios and allocate capital. One of the most important things in stock portfolio optimization is the use of a suitable optimization algorithm. The function of the multi-objective portfolio optimization model is quadratic. Quadratic functions are a special class of nonlinear programming problems in which the objective function is quadratic and the constraints are linear. Common algorithms for quadratic programming require certain parameters with fixed values. Such algorithms are extensively employed for solving real-world problems, particularly in financial contexts. The major objective of this research is to apply the inner point mathematical algorithm to optimize the stock portfolio and to use this algorithm to address the multi-objective portfolio optimization problem. With the GlueVaR risk measurement criterion, the problem of portfolio optimization takes into account the two objectives of maximizing returns during the research period and reducing investment risk, reassuring investors to make better and more accurate decisions about the final object of this research.

Methods
The necessary information for this study was provided by 50 active companies listed on the Tehran Stock Exchange. However, due to the availability of their daily prices during the study period, the final number of companies considered was reduced to 33. The inner point mathematical approach was utilized to optimize the model with the dual objectives of increasing efficiency and reducing risk. To demonstrate the effectiveness and capability of the algorithm in solving the problem of two-objective optimization, its output was compared with other risk measurement criteria such as variance, and value at risk (VaR). The investment risk in the stock portfolio was also calculated using the GlueVaR criterion. Comparing conditional (CVaR) was also done. The GlueVaR criterion has the advantage over the other criteria since it takes the investor's attitude toward risk into account. This advantage formed the basis of the calculation method in this research according to the mentioned algorithm.

Results
According to the research, value at risk (VaR) and conditional value at risk (CVaR) perform better than other variance risk measures in the portfolio optimization model with the GlueVaR risk measure and the internal point optimization method for determining the most effective border. Additionally, when applied to optimization problems, the internal point method discovers the optimal point with fewer iterations, providing strong evidence of the algorithm's effectiveness.

Conclusion
Based on the current findings, it is evident that the internal point algorithm is effective in resolving stock portfolio optimization issues. Additionally, the GlueVaR risk measurement criterion outperforms VaR, variance, and CVaR for most investors with diverse risk and return preferences.

Keywords: Internal point algorithm, Portfolio optimization, Risk, Return.

Citation: Goharnia, Elaheh; Mansourfar, Gholamreza & Biglari, Fahimeh (2023). Interior Point Algorithm in Multi-objective Portfolio Optimization: GlueVaR Approach. *Financial Research Journal*, 25(3), 453-484. https://doi.org/10.22059/FRJ.2023.352338.1007424 (*in Persian*)

Financial Research Journal, 2023, Vol. 25, No.3, pp. 453-484
Published by University of Tehran, Faculty of Management
https://doi.org/10.22059/FRJ.2023.352338.1007424
Article Type: Research Paper

Received: December 13, 2022
Received in revised form: May 09, 2023
Accepted: May 15, 2023
Published online: October 17, 2023

شاپا چـاپـی: ۸۱۵۳-۱۰۲۴
شاپا الکترونیکی: ۵۳۷۷-۲۴۲۳
تحقیقات مالی

الگوریتم نقطه درونی در بهینه‌سازی سبد سهام چند هدفه: رویکرد GlueVaR

الهه گهرنیا
کارشناسی ارشد، گروه حسابداری و مدیریت مالی، دانشکده اقتصاد و مدیریت، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: st_el.goharnia@urmia.ac.ir

غلامرضا منصورفر*
* نویسنده مسئول، دانشیار، گروه حسابداری و مدیریت مالی، دانشکده اقتصاد و مدیریت، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: g.mansourfar@urmia.ac.ir

فهیمه بیگلری
استادیار، گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: beiglari.f@gmail.com

چکیده

هدف: هدف اصلی این پژوهش، بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم ریاضی نقطه درونی و استفاده از این الگوریتم در حل مسئله بهینه‌سازی پرتفوی چندهدفه است.

روش: داده‌های این پژوهش، قیمت پایانی روزانه شرکت‌های فعال بورس اوراق بهادر تهران بود که در انتهای سال ۱۴۰۰، برای محاسبه شاخص ۵۰ شرکت برتر استفاده شد. از آنجا که دوره زمانی مورد مطالعه، سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۴۰۰ بود، از بین ۵۰ شرکت یادشده، فقط ۳۳ شرکت که در طول دوره بررسی داده‌های آن‌ها در دسترس بود، باقی ماند. برای بهبود مدل بهینه‌سازی نیز از الگوریتم ریاضی نقطه درونی استفاده شد. ریسک سرمایه‌گذاری در این مدل با معیار GlueVaR محاسبه شد و نتایج به‌دست‌آمده از حل مدل با سایر معیارهای اندازه‌گیری ریسک، همچون واریانس، ارزش در معرض ریسک (VaR) و ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) نیز مقایسه شد.

یافته‌ها: بر اساس یافته‌های پژوهش، در مدل بهینه‌سازی پرتفوی با معیار سنجش ریسک GlueVaR و الگوریتم بهینه‌سازی نقطه درونی، در قیاس با دیگر معیارهای ریسک واریانس، ارزش در معرض ریسک (VaR) و ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR)، در یافتن مرز کارا عملکرد بهتری را نشان می‌دهد. همچنین الگوریتم نقطه درونی در حل مسائل بهینه‌سازی دفعات تکرار کمتری را در یافتن نقطه بهینه از خود نشان می‌دهد که این خود دلیلی بر قوی بودن این الگوریتم است.

نتیجه‌گیری: نتایج حاضر نشان می‌دهد که الگوریتم نقطه درونی قابلیت دارد که برای حل مسائل بهینه‌یابی سبد سهام استفاده شود و همچنین، معیار سنجش ریسک GlueVaR در مقایسه با معیارهای سنجش ریسک VaR، واریانس و CVaR می‌تواند برای بیشتر اشخاص با ترجیحات بازده و ریسک متفاوت، عملکرد بهتری داشته باشد.

کلیدواژه‌ها: الگوریتم نقطه درونی، بازده، بهینه‌سازی سبدسهام، ریسک.

استناد: گهرنیا، الهه؛ منصورفر، غلامرضا و بیگلری، فهیمه (۱۴۰۲). الگوریتم نقطه‌درونی در بهینه‌سازی سبد سهام چند هدفه: رویکرد GlueVaR. *تحقیقات مالی*، ۲۵(۳)، ۴۵۳- ۴۸۴.

تحقیقات مالی، ۱۴۰۲، دوره ۲۵، شماره ۳، صص. ۴۵۳- ۴۸۴
ناشر: دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
نوع مقاله: علمی پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۹/۲۲
تاریخ ویرایش: ۱۴۰۲/۰۲/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۲۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۷/۲۵
doi: https://doi.org/10.22059/FRJ.2023.352338.1007424

مقدمه

یکی از چالش‌های مهم سرمایه‌گذاران در مسائل مالی را می‌توان مسئله انتخاب پرتفوی بهینه دانست. بهینه‌سازی سبدسهام مفهومی است که توسعه و گسترش بازارهای مالی و تصمیم‌گیری‌های مالی را باعث می‌شود. از طرف دیگر، بهینه‌سازی فرایندی است که طی آن با توجه به محدودیت‌های موجود در هرتصمیم‌گیری، مطلوب‌ترین توازن میان علایق متضاد مشخص می‌شود (آصفی، فلاح تفتی، باقری کاظم‌آبادی و فلاح‌پور، ۱۳۹۷؛ احمدی اقدم، تقی‌زاده یزدی و فلاح‌پور، ۱۳۹۵). بر این اساس، سبد سهام مطلوب را می‌توان سبدی تعریف کرد که بین دو معیار ریسک و بازده سرمایه‌گذاری تعادل برقرار کند (وودساید ـ اوریاخی، لوکاس و بیسلی[1]، ۲۰۱۱). موضوع بهینه‌سازی سبد سهام که در سال ۱۹۵۲ برای اولین بار توسط مارکوییتز[2] ارائه شد، در اقتصاد مالی گسترش چشمگیری داشته (هاشمی‌نژاد و باقرپور، ۱۳۹۸) و این موضوع در نگرش سرمایه‌گذاران جهت انتخاب سبد سهام مورد نظر برای سرمایه‌گذاری تأثیر بسزایی گذاشته است (سینایی و زمانی، ۱۳۹۳).

مدل میانگین ـ واریانس مارکوییتز بیان می‌کند که سرمایه‌گذاران علاوه بر اینکه به‌دنبال حداکثرسازی بازده هستند، به‌دلیل حاکم بودن اصل ریسک‌پذیری، باید از حصول حداقل ریسک نیز مطمئن باشند؛ زیرا اگر سرمایه‌گذاران فقط به‌دنبال حداکثرسازی بازده مورد انتظار بودند، تنها به سرمایه‌گذاری در یک نوع دارایی که بیشترین بازده را دارد، تمایل نشان می‌دادند؛ درحالی که سرمایه‌گذاران مجموعه‌ای از اوراق بهادار را در یک پرتفوی نگهداری می‌کنند (نیلچی، فرید و زارع، ۱۳۹۸). بهینه‌سازی سبد سهام را به‌صورت خطی و غیرخطی (چند هدفه) می‌توان انجام داد. مدل مارکوییتز که یکی از معروف‌ترین مدل‌های بهینه‌سازی سبدسهام است، کاستی‌هایی دارد. یکی از کاستی‌های این مدل درجه دوم بودن معیار ریسک است که در تعداد سهام زیاد محاسبات را دشوار می‌کند (علی‌پور جورشری، یاکیده و محفوظی، ۱۳۹۶). از دیگر کاستی‌های مدل مارکوییتز، معیار سنجش ریسک به روش انحراف معیار بازدهی‌هاست که به‌دلیل عدم برخورداری توزیع بازدهی اکثر سهام شرکت‌ها از توزیع نرمال معیار مناسبی برای ارزیابی ریسک سبد سهام نیست. همچنین مارکوییتز برای مدلش موضوع افق زمانی بلندمدت را مدنظر قرار نداده بود (قندهاری، آذر، یزدانیان و گل‌ارضی، ۱۳۹۸).

برای رفع مشکلات ناشی از استفاده از معیار محاسبه ریسک کلاسیک در مدل بهینه‌سازی سبد سهام، از دیگر معیارهای جایگزین سنجش ریسک مانند معیارهای سنجش ریسک VaR[3] و CVaR[4] استفاده شده است.

معیار ارزش در معرض ریسک (VaR)، یک معیار ریسک نامطلوب است که با درک افراد نسبت به ریسک تطابق بیشتری دارد. همچنین در آن الزامی به نرمال فرض کردن توزیع داده‌ها وجود ندارد. در روش ارزش در معرض ریسک برای انتخاب پرتفوی بهینه، اصول‌کار شبیه به مارکوییتز است، با این تفاوت که سرمایه‌گذار به‌دنبال ارزش در معرض ریسک کمتر و بازده بیشتر است. این معیار در کنار نقاط قوت خود، ضعف‌هایی نیز دارد، از جمله اینکه توانایی محاسبه

1. Woodside - Oriakhi, Lucas & Beasly
2. Markowitz
3. Value - at - risk
4. Conditional Value - at - risk

مقادیر ریسک بیشتر و فراتر از ارزش‌در معرض ریسک را ندارد. همچنین ویژگی عدم تحدب درمورد آن مصداق دارد، یعنی دارای اکسترمم‌های (نقاط کمینه و بیشینه) موضعی زیادی است و در نتیجه کمینه کردن آن بسیار مشکل است و برای توزیع‌های غیرنرمال، کنترل و بهینه‌سازی آن بسیار دشوار است (نشاطی زاده و حیدری، ۱۳۹۸). معیار ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR)، نارسایی‌ها و نقاط ضعف معیار ارزش‌در معرض ریسک را پوشش می‌دهد. این الگو به‌صورت میانگین وقوع ریسک‌هایی تعریف شده است که بزرگ‌تر و فراتر از ارزش در معرض ریسک هستند. به عبارت دیگر CVaR معیار دیگر ریسک نامطلوب است که نسبت به VaR، محافظه‌کارانه‌تر و دارای خاصیت زیرجمع پذیری[1] است. زیرجمع‌پذیری به این مفهوم دلالت دارد که ریسک سبد دارایی باید از مجموع ریسک‌های هریک از دارایی تشکیل‌دهنده آن، کمتر یا حداقل مساوی آن باشد؛ به‌طوری‌که ادغام دارایی‌ها در پرتفولیو باعث افزایش ریسک نشود. این خاصیت در کنار سه معیار دیگر ریسک که شامل عدم تغییرانتقالی[2]، یکنوایی[3] و همگنی مثبت[4] می‌باشند که ۴ معیار اصلی برای انسجام[5] در محاسبات ریسک محسوب می‌شوند. این معیار میانگین a درصد از بدترین زیان‌هاست. با این وجود این معیار نیز در برخی موارد بسیار محتاطانه عمل کرده و اندازه ریسک را بیشتر از آنچه هست اندازه‌گیری می‌کند که ممکن است باعث هدررفتن بخشی از سرمایه‌های شرکت شود (جیا و دایر[6]، ۲۰۰۰). برای رفع معایب دو معیار ریسک فوق، معیار جدید GlueVaR توسط بلزا سامپرا[7] در سال ۲۰۱۴ ارائه شده است. با این معیار می‌توانند ریسک را به‌گونه‌ای تخمین بزنند که هم در شرایط بحرانی بازار معیاری مناسب باشد و هم از احتیاط بیش از اندازه اجتناب شود. از مزایای دیگر معیار ریسک GlueVaR این است که می‌توان آن را به‌صورت ترکیبی خطی از دو معیار VaR و CVaR نوشت (آقامحمدی، سجودی، سجودی و طاووسی، ۱۳۹۶).

از دیگر موارد با اهمیت در بهینه‌سازی سبد سهام، استفاده از الگوریتم بهینه‌یابی مناسب است. تابع مدل چند هدفه بهینه‌سازی سبد سهام از نوع توابع درجه دوم است. توابع درجه دوم رده خاصی از مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی هستند که در آن‌ها، تابع هدف از نوع درجه دوم و قیود خطی است. الگوریتم‌های متداول برای برنامه‌ریزی درجه‌دوم نیازمند پارامترهای معین با مقادیر ثابت هستند. این نوع از الگوریتم‌ها به‌طور گسترده در حل مسائل دنیای واقعی به خصوص در مباحث مالی به کار برده می‌شوند. برای این منظور و جهت حل مدل بهینه‌سازی سبد سهام چند هدفه در پژوهش حاضر، از الگوریتم‌های ریاضی نقطه‌درونی استفاده شده است.

روش‌های نقطه‌درونی[8] متداول‌ترین رویکرد مورد استفاده برای حل مسائل کلی درجه دوم هستند (لو، یو، لینگ و ماسیجوسکی[9]، ۲۰۰۹). این روش‌ها برای بهینه‌سازی غیرخطی از سال ۱۹۶۰ توسعه یافتند؛ اما به مدت دو دهه نتوانستند

1. Subadditivity
2. Translationaal invariance
3. Monotonicity
4. Positive homogeneity
5. Coherent
6. Jia & Dyer
7. Belles - Sampera
8. Interior - Point Methods
9. Mark, Lau, Yue, Ling & Maciejowski

حمایت کافی از سوی پژوهشگران را به خود جلب کنند. پس از موفقیت چشمگیر روش‌های نقطه‌درونی برای برنامه‌ریزی خطی، مجدداً علاقه پژوهشگران نسبت به این روش برای حل مسائل غیرخطی برانگیخته شد. در سال ۱۹۹۰ روش‌های نقطه‌درونی که تا آن زمان به نام روش‌های مانعی شناخته شده بودند، به همان اندازه که در بهینه‌سازی خطی به موفقیت رسیدند، برای حل مدل‌های بهینه‌سازی غیرخطی نیز کاربرد پیدا کردند و در حال حاضر به‌عنوان یکی از قوی‌ترین روش‌ها در بین الگوریتم‌های ریاضی برای برنامه‌ریزی غیرخطی در مقیاس‌های بزرگ مورد استفاده قرار می‌گیرند (نوسدال و رایت[1]، ۲۰۰۶: ۵۶۴-۵۶۳). این روش با عبور از داخل ناحیه جواب‌ها نقاطی را مورد بررسی قرار می‌دهد تا به یک راه‌حل نهایی نزدیک شده و نقطه بهینه مدنظر را بیابد (جتپیپاتتناپونگ و سریجانتونگسیری[2]، ۲۰۲۱). برای پیدا کردن نقطه بهینه در این الگوریتم نیاز به آزمایش در هر نقطه بوده و در صورت بهینه نبودن نقطه مدنظر، راه حل در نقطه جدید به وجود آمده تکرار می‌شود. برهمین اساس این روش‌ها به روش‌های تکراری نیز معروف هستند (نوسدال و رایت، ۲۰۰۶: ۳۹۳-۳۹۲).

در برنامه‌های درجه دوم در مقیاس‌های بزرگ، اعداد به قدری زیاد هستند که نمی‌توانند به راحتی در مدت زمان معقول و منطقی اجرا شوند. از لحاظ زمان محاسباتی در بهینه‌سازی مسائل، روش‌های نقطه‌درونی دارای تابع زمان اجرای چند جمله‌ای هستند، درحالی که در دیگر روش‌های استفاده شده برای حل مسائل درجه‌دوم، تابع زمان اجرای مسائل به‌صورت نمایی است (جتپیپاتتناپونگ و سریجانتونگسیری، ۲۰۲۱). شایان ذکر است که میزان پیچیدگی محاسباتی در روش‌های تکراری با تعداد عملیات محاسباتی (جمع، ضرب، تقسیم) که باید در هرتکرار به اجرا درآید، اندازه‌گیری می‌شود، از این نظر، در روش‌های نقطه‌درونی به‌دلیل پایین بودن دفعات تکرار در انجام محاسبات مسائل، پیچیدگی کمتر است (لو و همکاران، ۲۰۰۹). طبق بررسی‌های انجام شده که در پیشینه پژوهش حاضر آورده شده و علارغم داشتن مزیت‌های ذکرشده برای روش نقطه‌درونی، این روش در بین پژوهش‌گران مالی به ندرت مورد توجه قرار گرفته است؛ ولی در مقالات گونزیو[3] (۲۰۰۷) و هیتوشی تکهارا[4] (۱۹۹۳) ویژگی قوی بودن الگوریتم ریاضی برای برنامه‌ریزی درجه‌دوم در مقیاس‌های بزرگ‌تر مورد تأیید قرار گرفته است ولی در مقاله حاضر علاوه بر اینکه الگوریتم نقطه درونی برای حل مسئله بهینه‌سازی با مدل کلاسیک مارکوییتز بررسی شده است بلکه در ۳ مدل دیگر محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده است.

یک سرمایه‌گذار علاوه بر اینکه در تلاش برای حداکثرکردن بازده مورد انتظار و حداقل‌کردن ریسک در سبد سهام و رسیدن به مطلوبیت مورد انتظار است، در چگونگی انتخاب سهام برای پرتفوی خود و تخصیص سرمایه، نیازمند روش‌ها و معیارهای مناسبی است، بدین منظور معیار ریسکی که بلزاسامپرا، گویلن و سنتولینو[5] (۲۰۱۴) با عنوان GlueVaR ارائه کرده‌اند، براساس فرض چنین نیازها و تصمیم‌های سرمایه‌گذاران ایجاد شده است، معیار ریسک

1. Nocedal & Wright
2. Jetpipattanapong, Srijuntongsiri
3. Gondzio
4. Takehara
5. Belles-Sampera, Guillen, Santolino

GlueVaR با الگوریتم نقطه‌درونی چه در شرایط بحرانی بازار چه در شرایط عادی، معیار مناسبی است و همه نیازهای سرمایه‌گذاران را در تصمیمات مالی برآورد می‌کند و بهترین سبدهای سهام را برای آن‌ها ایجاد می‌کند تا بهترین پرتفوی را انتخاب کنند.

هدف اصلی پژوهش حاضر استفاده از الگوریتم ریاضی نقطه‌درونی برای حل مسئله پرتفوی چند هدفه با استفاده از معیار سنجش ریسک GlueVaR می‌باشد. نتایج به‌دست‌آمده از این رویکرد و مقایسه آن با مدل میانگین ـ واریانس مارکوییتز، میانگین ـ ارزش در معرض ریسک و میانگین ـ ارزش در معرض ریسک شرطی برتری در کارایی و عملکرد معیار ریسک GlueVaR را نسبت به دیگر معیارها اثبات کرد. از سوی دیگر نوآوری اصلی پژوهش حاضر الگوریتم نامبرده می‌باشد لذا این الگوریتم ادبیات موضوعی مرتبط با بهینه‌سازی پرتفوی را گسترش داده است.

با توجه به این مقدمه، در ادامه به مرور پیشینه پژوهش پرداخته شده و سپس روش‌شناسی آن معرفی می‌شود. همچنین به پیاده‌سازی مدل‌های نام برده، پرداخته شده و نتایج این مدل‌ها در قسمت نتایج و پیشنهادهای مقاله حاضر بیان می‌شود.

پیشینۀ تجربی پژوهش

به‌منظور بررسی پیشینه پژوهش مقالات زیادی اعم از داخلی و خارجی مورد بررسی قرار گرفت. نتیجه بررسی ما حاکی از این واقعیت است که بیشتر مقالات بهینه‌سازی پرتفوی با استفاده از روش‌های فراابتکاری انجام‌شده و روش‌های ریاضی کمتر مورد استفاده قرار گرفته‌است. به‌طور مثال، شیرکوند و فدایی (۱۴۰۱) با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی توده ذرات نشان دادند که عملکرد سبدهای سهام با سناریوبندی و ملاک حداقل ـ حداکثر پشیمانی بهبود می‌یابد. گل ارضی و انصاری (۱۴۰۱) نیز با بررسی و ترسیم مرزکارای حاصل از رویکرد میانگین ـ واریانس و میانگین ـ نیم‌واریانس نشان دادند که الگوریتم SPEA2 نسبت به الگوریتم NSGAII در یافتن پورتفوهای بهینه برتری چشمگیری دارد. نیلچی، فرید و زارع (۱۳۹۸) با کاربرد یادگیری عمیق DNN و الگوریتم جست‌وجوی گرانشی اثبات کردند پیش بینی قیمت سهام با استفاده از شاخص های تکنیکی، در پرتفوی ریسک گریز عملکرد بهتری نسبت به میانگین شاخص بازار ارائه می‌دهد. رضایی، فلاحتی و سهیلی (۱۳۹۷) نیز به بررسی کارآمدی دو الگوریتم تجمع ذرات چند هدفه (MOPSO) و الگوریتم ژنتیک با رتبه‌بندی نامغلوب (NSGA2) در بهینه‌سازی پرتفوی چندهدفه پرداخته و بیان می‌کنند که الگوریتم MOPSO نسبت به NSGA2 برای هردو حالت دو هدفه و سه هدفه (حداکثرسازی بازده و حداقل‌سازی ریسک و تعداد دارایی ها یا سهام) عملکرد بهتری دارد. شبیه‌سازی اریکا، هندری و هرتونو[1] (۲۰۱۸) با استفاده از الگوریتم ژنتیک پیشرفته EGA برای بهینه‌سازی پرتفوی نشان داد که مدل پیشنهاد شده ایشان بهتر از مدل کلاسیک است. لی[2] (۲۰۱۶) نیز به انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از مدل میانگین ـ چولگی ـ واریانس پرداخت و با استفاده از الگوریتم

1. Erica, Handari & Hertono
2. Li

فازی اقدام به حل مسئله بهینه‌سازی کرد، نتایج پژوهش ایشان نشان داد که مدل ارائه شده، می‌تواند کارایی بیشتری نسبت به مدل مارکوییتز داشته باشد.

از این رو، روش‌های ریاضی به‌طور کلی و الگوریتم نقطه درونی به‌طور خاص، در حوزه بهینه‌سازی مسائل مربوط به مدیریت سبد سهام به ندرت مورد توجه قرار گرفته است. از جمله پژوهش‌های نادری که از الگوریتم‌های ریاضی در حل مسئله بهینه‌سازی پورتفولیو استفاده کرده است، می‌توان به مطالعه راعی، نمکی احمدی (۱۴۰۱) اشاره کرد که با استفاده از برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم نشان دادند که رویکرد استوار نسبی در مقایسه با روش میانگین ـ واریانس برای بیشتر اشخاص با ترجیحات ریسک و بازده متفاوت عملکرد بهتری دارد. دریایی، عطائی و اسکروچی (۱۳۹۹) در مقاله‌ای تحت عنوان «الگوریتم جدید مبتنی بر روش نقطه‌درونی برای حل مسائل بهینه‌سازی نیمه نامتناهی خطی»، دو الگوریتم نقطه‌درونی و گرادیان را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی معرفی می‌کنند و نشان می‌دهند که الگوریتم نقطه‌درونی نسبت به الگوریتم گرادیان از سرعت و دقت بیشتری برخوردار است و از قوی‌ترین روش‌ها شناخته شده است.

دمون، دی‌متئو و کالینون[1] (۲۰۲۰) نیز در مقاله‌ای تحت عنوان «تجزیه کلاسیک انتخاب پرتفوی مارکوییتز»، از الگوریتم نقطه‌درونی و الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده (SA) استفاده کردند. بر اساس نتایج حاصله از این پژوهش هر دو روش نتایج کمابیش یکسانی در مورد تخصیص بودجه، ریسک و بازده ارائه کرده‌اند. کاردوس[2] (۲۰۲۰) در مقاله‌ای با عنوان «روش نقطه‌درونی با کارایی بالا (کاربرد در مشکلات شبکه برق)»، از الگوریتم نقطه‌درونی برای حل مشکلات صنعتی و مهندسی استفاده می‌کند و به این نتیجه می‌رسد که روش نقطه‌درونی یکی از رایج‌ترین تکنیک‌ها برای بهینه‌سازی غیرخطی در مقیاس بزرگ بوده و کارایی بالایی برای حل مشکلات جریان برق بهینه و مشکلات بهینه‌سازی مربوط به این صنعت دارد. یی شوای و وانگ[3] (۲۰۲۲) در مقاله‌ای تحت عنوان «بهینه‌سازی گشتاورهای مرتبه بالاتر پرتفوی از طریق برنامه‌ریزی تفاضل محدب و مجموع مربعات» استفاده کرده و نشان دادند که الگوریتم نقطه درونی اغلب بهترین راه‌های عددی را در کوتاه‌ترین زمان و مقیاس‌های بزرگ ارائه می‌دهد.

محاسبه ریسک با استفاده از معیار GlueVaR نیز در مقالات داخلی و خارجی متعددی مورد استفاده قرار گرفته است. قندهاری و همکاران (۱۳۹۸) روشی را برای به روزکردن چند مرحله‌ای سبد سهام پیشنهاد کرده و از نرخ‌های بازده به‌عنوان متغیر تصادفی طی دوره، از روش مونت کارلو برای سناریوسازی و از معیار GlueVaR به‌عنوان معیار اندازه‌گیری ریسک استفاده کرده‌اند. آقامحمدی و همکاران (۱۳۹۶) در مقاله‌ای تحت عنوان «معرفی معیار ریسک جدید GlueVaR و برآورد آن با استفاده از مدل رگرسیونی چندکی ترکیبی» مقایسه رویکردهای VaR و CVaR با GlueVaR در بازار بورس آمریکا و دو شرکت از بازار بورس ایران را بررسی کردند که طبق نتایج ایشان، رویکرد GlueVaR هم از لحاظ تئوری و هم به لحاظ کاربردی، نسبت به دو رویکرد دیگر کارایی بیشتری دارد و به‌عنوان معیاری کارا به مدیران

1. Demone, Di Matteo & Collignon
2. Kardos
3. Yi-Shuai & Wang

اقتصادی معرفی شده است. بلزاسامپرا، گویلن و سنتولینو[1] (۲۰۱۴) در مقاله‌ای بـا عنـوان «معیـار ریسـک GlueVaR در کاربردهای تخصیص سرمایه»، بیان می‌کنند که مدیران در سناریوهای متعـدد بـا مشـکلات تخصـیص سـرمایه مواجـه می‌شوند و اثبات می‌کنند که معیار ریسک GlueVaR را می‌تـوان در تخصـیص بهینـه سـرمایه بـا اسـتفاده از دو اصـل تخصیص سرمایه پیشنهاد شده در مقاله فوق به کار برد. بلزا سامپرا، گویلن و سنتولینو (۲۰۱۶) در مقاله‌ای دیگر با عنوان «استفاده از معیارهای انعطاف‌پذیر مبتنی بر ارزیابی ریسک»، از روش محاسبه معیار ریسـک جدیـد GlueVaR اسـتفاده کردند. این مقاله نتایج نشان می‌دهد که این معیار برای ارزیابی ریسک، محافظه‌کارانه است و لذا مدیران باید در اسـتفاده از این تقریب برای تخمین مقادیر اندازه‌گیری ریسک احتیاط کننـد. یـین و زو[2] (۲۰۱۶) نیـز از معیـار GlueVaR بـرای محاسبه ریسک استفاده کرده و توصیه می‌کنند که در برنامه‌های مالی و بیمه برای اندازه‌گیری ریسک انحرافـات، معیـار GlueVaR به‌دلیل ویژگی‌های جذاب آن، مورد استفاده قرار گیرد. کرزولک[3] (۲۰۱۷) نشان داد که اگر حوادث غیرمنتظره مورد توجه هستند، بهتر است برای اندازه‌گیری ریسک توزیع دم پهن، از سنجه ریسک GlueVaR استفاده شـود. مزیـت GlueVaR در مقایسه با سایر سنجه‌های ریسک این است که نگرش سرمایه‌گذار نسبت به ریسک را در نظر می‌گیـرد و مهم‌تر از همه، فرضیه ویژگی زیرجمع‌پذیر بودن را برآورد مـی‌کنـد. کرزولـک و ترزپیـوت[4] (۲۰۱۷) بـه بررسـی رویکـرد کلاسیک انحراف‌معیار به‌عنوان معیار اندازه‌گیری ریسک پرداخته و با استفاده از روش محاسبه GlueVaR تأکید کرده‌اند که معیار انحراف معیار باید اصلاح شود. ایشان همچنین ابزار مناسبی را برای اثربخشی نسـبت امگـا مطـرح کردنـد کـه نسبت سود موردانتظار به زیان موردانتظار در یک آستانه ثابت تعریف شده است. هانگ و یین[5] (۲۰۱۹) در مقاله‌ای تحـت عنوان «بیمه اتکایی متقابل مطلوب با استفاده از محاسبه معیار ریسک GlueVaR» با هدف اندازه‌گیری ریسک با معیـار محاسبه ریسک GlueVaR، استراتژی‌های بهینه بیمه اتکایی متقابل را مورد بررسی قرار می‌دهند و بـا بیـان مشـکلات حاصل از ترکیب دو معیار VaR و TVaR[6] شکل جدیدی از معیار GlueVaR را معرفی می‌کنند.

روش‌شناسی پژوهش

اصلی‌ترین ابزارهای تصمیم‌گیری در مباحث مالی شامل تکنیک‌های پـیش‌بینـی و بهینـه‌سـازی هسـتند. تکنیـک‌هـای پیش‌بینی بیشتر مربوط به آمار می‌شوند (راعی، ۱۳۸۵). کرنوجلس و توتونچو[7] (۲۰۱۸) بهینه‌سازی را فرایند یافتن بهترین راه انجام تصمیم‌گیری‌ها که یک مجموعه از محدودیت‌ها را ارضا می‌کند، تعریف می‌کنند. مسئله بهینه‌سازی پرتفـوی دو هدفه مقید، به‌دنبال یافتن سبدی هست که ریسک را حداقل و بازده مورد انتظار حداکثری را برآورد کند. قید مورد نظر در این مدل، سقف و کف وزن هر دارایی قرار گرفته است. سرمایه‌گذاران منطقی به‌دنبـال سـبد سـهام کـارا هسـتند؛ پـس

1. Belles-Sampera, Guillen & Santolino
2. Yin & Zhu.D
3. Krezolek
4. Krezolek & Trzpiot
5. Huang & Yin
6. Tail Value - at - risk
7. Cornuejols, Pena & Tütüncü

می‌توانند به ازای یک بازده معین و از طریق کمینه کردن ریسک آن را شناسایی کنند. با تکرار فرایند فوق می‌توانند به استخراج مجموعه پرتفوی‌های کارا برسند که به اصطلاح مرز کارا نامیده می‌شود (کمبل، هویسمن و کودیجک[1]، ۲۰۰۱).

در این قسمت عملکرد الگوریتم پیشنهادی در حل مسئله بهینه‌سازی پرتفوی دوهدفه با مدل‌های ریسک میانگین ـ واریانس، VaR، CVaR و GlueVaR بررسی می‌شود. مدل ارائه شده در مقاله حاضر را می‌توان به‌صورت زیر ارائه کرد.

مدل بهینه‌سازی پرتفوی دوهدفه

مدل تابع هدف برای بهینه‌سازی پرتفوی دو هدفه، بر اساس مدل کلاسیک مارکوییتز براساس روابط زیر است.

$$Min\ Risk: \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} GV_i\, X_i\, GV_j\, X_j\, \sigma_{ij} = x^T G\, x$$ رابطه ۱)

$$Max\ Return: R_p = \sum_{i=1}^{n} X_i\, E(R_i) = x^T \mu$$ رابطه ۲)

$$G_{ij} = GV_i\, GV_j\, \sigma_{ij}$$ رابطه ۳)

$$\mathbf{s}.\mathrm{t}: \sum_{i=1}^{n} X_i = 1$$ رابطه ۴)

$$0 \le X_i \le 1\ ;\ i = 1,2,3,\ldots\ldots,n$$

در معادله ریسک، X_i وزن دارایی i ام موجود در سبد و GV ریسک هر سهم است و σ_{ij} بیانگر هم‌بستگی میان بازده دو دارایی i ام و j ام، همچنین x بردار ستونی و x^T بردار ترانهادهx (بردار سطری) و G ماتریسی که در رابطه ۳ تعریف شده که ماتریس کواریانس نامیده می‌شود، σ_i^2 نیز بیانگر واریانس دارایی i ام است.

درمعادله بازده، R_i بازده هرسهم، $E(R_i)$ و μ میانگین بازده هرسهم، R_p بازده کل دارایی و n تعداد کل سهام موجود در بازار است. در این مدل هدف یافتن ترکیبات مختلف و بهینه‌ای از X_i است که بتواند دو هدف ریسک حداقل، بازدهی حداکثر را برآورد کند. در رابطه ۴ محدودیت‌ها و قیدهای مدل نوشته شده است.

در این پژوهش، به‌دلیل استفاده از الگوریتم نقطه درونی (در این الگوریتم از یک تابع هدف استفاده می‌شود) با ترکیب دو تابع هدف فوق، می‌توان مسئله پرتفوی را به‌صورت تابع یک هدفه و با قیدهای زیر نوشت:

$$Max\ x^T\mu - k x^T G x$$ رابطه ۵)

$$\mathrm{s.t}: \sum_{i=1}^{n} X_i = 1$$

$$0 \le X_i \le 1\ ;\ i = 1,2,3,\ldots\ldots,n$$

1. Campbel, Huisman & Koedijk

پارامتر غیرمنفی k به‌عنوان ضریب ریسک در نظر گرفته می‌شود و مقداری که برای آن مد نظر قرار گرفته بستگی به ترجیحات سرمایه‌گذار دارد. سرمایه‌گذاران محافظه‌کار که تأکید زیادی در حداقل رساندن ریسک در پرتفوی خود دارند، برای افزایش وزن واریانس در عملکرد هدف، مقدار زیادی برای k انتخاب می‌کنند و سرمایه‌گذاران با جسارت بیشتر که به امید بازگشت بازده بالاتر آماده ریسک بیشتر هستند، مقدار کمتری از k را انتخاب می‌کنند.

در الگوی مارکوییتز، واریانس بیانگر ریسک سبد دارایی است. در واقع مارکوییتز مسئله بهینه‌سازی سبد دارایی را به‌صورت یک مدل برنامه‌ریزی درجه دوم با هدف حداقل‌سازی واریانس مجموعه دارایی‌ها با این شرط که بازده مورد انتظار برابر با یک مقدار ثابت باشد، مطرح می‌کند. از این رو مدل تحت عنوان میانگین ـ واریانس (MV) نیز خوانده می‌شود که یک مدل بهینه‌سازی غیرخطی درجه دو است. نکته مهم در استفاده از مدل مارکوییتز آن است که معیار اندازه‌گیری ریسک، انحراف معیار است و این معیار تا زمانی قابل قبول است که بازده دارایی توزیع نرمال داشته باشد. بنابراین در توزیع‌های نامتقارن برای اندازه‌گیری ریسک می‌توان از مدل‌های معیار ارزش در معرض ریسک (VaR)، ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) یا GlueVaR استفاده کرد.

الگوی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری براساس مدل پایه‌ای مارکوییتز با معیار «واریانس»

طبق مدل مارکوییتز برای به‌دست آوردن انتخاب پرتفوی بهینه در روش مارکوییتز که حداقل واریانس برای یک سطح خاصی از بازده است مدل برنامه‌ریزی خطی زیر استفاده می‌شود:

رابطه ۶)

$$Min = \sigma_p^2$$

$$\mathrm{s.t:}\ \mathrm{E}(\mathrm{R_p}) = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} W_i\, E(R_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$$

$$W_i \ \geq \ 0\ ;\ (\ i = 1, \dots, n)$$

از نتایج حاصل از مدل میانگین ـ واریانس این است که سرمایه‌گذاران می‌خواهند حتی‌المقدور دارایی‌های مالی متنوعی را دریافت کنند. این گفته زمانی قابل اجراست که هیچ محدودیتی برسر راه هزینه‌های خرید و فروش اندک وجود نداشته باشد. در واقع مارکوییتز نشان داد که ریسکی بودن پرتفوی را می‌توان از طریق تنوع و گوناگونی کاهش داد. چنانچه ارتباط و هم‌بستگی بین دارایی‌ها کمتر باشد، بدین معناست که تنوع دارایی‌ها بیشتر است و هرچقدر ارتباط مشترک بین دارایی‌ها کمتر باشد، ریسک بیشتری را می‌توان پوشش داد. در نتیجه این‌کار به سرمایه‌گذاری مفید و سودمندی منجر خواهد شد.

الگوی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با معیار «ارزش در معرض ریسک»

از نظر ریاضی می‌توان ارزش در معرض ریسک را به‌صورت زیر نشان داد:

رابطه ۷)

$$Pr\{ -G \ \geq \ Var\} \ = \ 1 - \ \alpha$$

که در آن G تغییر ارزش پرتفوی در دوره نگهداری مورد نظر و α -1، سطح اطمینان معین هستند. روابط فوق بیان می‌کند که احتمال اینکه ارزش پرتفوی در دوره آتی، بیش از ارزش در معرض ریسک باشد، حداکثر برابر α است. به عبارت دیگر، احتمال اینکه زیان سبد دارایی در دوره آتی کمتراز ارزش در معرض ریسک باشد α -1 است (رهنمای رودپشتی، چاوشی و صابر، ۱۳۹۳).

در روش ارزش در معرض ریسک برای انتخاب پرتفوی بهینه، اصول کار شبیه به مدل مارکوییتز است، با این تفاوت که سرمایه‌گذار به‌دنبال ارزش در معرض ریسک کمتر و بازده بیشتر است. جهت به‌دست آوردن سبد بهینه سهام به عبارت دیگر وزن‌های بهینه هریک از سهم‌ها و ارزش در معرض ریسک بهینه پرتفوی، لازم است مسئله زیر حل شود:

رابطه ۸)

$$Min: VaR_p$$

$$s.t: \sum_{i=1}^{n} W_i = 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} W_i E(R_i) \geq R^*$$

$$W_i \geq 0 ; \ (i = 1, \dots, n)$$

که در آن VaR_p ارزش در معرض ریسک پرتفوی بوده و همه اطلاعات لازم از قبیل ارزش در معرض ریسک هریک از سهم‌ها، میانگین بازدهی هریک از سهم‌ها و بازدهی کل پرتفوی موجود یا اولیه معین است و w_i ها یعنی وزن دارایی‌ها در پرتفوی مجهول هستند.

ارزش در معرض ریسک بهینه برای کل پرتفوی سهام موجود می‌توان با استفاده از رابطه زیر به‌دست آورد:

رابطه ۹)

$$VaR = MZ_a \sigma_a = MZ_a \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} W_i W_j \sigma_{ij}}$$

$$= MZ_a \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i}^{n} W_i W_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (w_i \sigma_i MZ_a)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i}^{n} W_i W_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j (MZ_a)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 VaR_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i}^{n} W_i W_j VaR_i VaR_j \sigma_{ij}}$$

که در آن σ_i، انحراف معیار دارایی iام ؛ σ_j ، انحراف معیار دارایی j ام ؛ ρ_{ij} ، ضریب هم‌بستگی میان دارایی‌های i و j؛ W_i، وزن دارایی i ام در پرتفوی؛ W_j، وزن دارایی j ام در پرتفوی؛ MZ_a ، ارزش بازاری دارایی و n ، تعداد دارایی‌های منتخب برای تشکیل پرتفوی می‌باشد. بعد از حل مسئله فوق به روش برنامه‌ریزی غیرخطی، سبد بهینه دارایی‌های مالی به‌دست می‌آید.

این معیار در کنار نقاط قوتش دارای ضعف‌هایی است. ازجمله، توانایی محاسبه مقادیر ریسک بیش‌تر و فراتر از ارزش در معرض ریسک را ندارد. کاهش ارزش در معرض ریسک ممکن است منجر به امتداد یافتن دنباله‌های فراتر از ارزش در معرض ریسک شود و سرانجام این‌که ویژگی عدم زیرجمع‌پذیری ریسک در مورد آن مصداق دارد.

الگوی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با معیار «ارزش در معرض ریسک شرطی»

باتوجه به کاستی‌ها و نقاط ضعف ارزش در معرض ریسک، آرتزنر با معرفی معیار ریسک شرطی، معیاری را معرفی کرد که نارسایی‌های ارزش در معرض ریسک را پوشش می‌دهد. این معیار که به نام‌های ریسک موردانتظار و واریانس دنباله‌دار نیز شهرت دارد، تمام ویژگی‌هایی که ارزش در معرض ریسک را با کاستی‌هایی مواجه می‌کرد، به خوبی در برمی‌گیرد (آرتزنر، دلبائن و جین مارس[1]، ۱۹۹۹). این معیار به‌صورت میانگین وقوع ریسک‌هایی که بزرگ‌تر و فراتر از ارزش در معرض ریسک می‌باشند، تعریف کرده است. به عبارت دیگر α درصد از میانگین توزیع بازده متغیر تصادفی بزرگ‌تر از ارزش در معرض ریسک است (یامای و یوشیبا[2]، ۲۰۰۲).

در یک تحلیل کلی می‌توان چنین بیان کرد که ارزش در معرض ریسک شرطی یک معیار دیگر ریسک نامطلوب است که نسبت به ارزش در معرض ریسک، محافظه‌کارانه‌تر و دارای خاصیت زیرجمع‌پذیری بوده و جز معیارهای منجسم محسوب می‌شود. این معیار، میانگین α درصد از بدترین زیان‌هاست و با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$CVaR_a = \int_{-\infty}^{+\infty} ZdFx^a(Z) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{VaR_a(X)}^{+\infty} ZFx(Z)dZ \qquad \text{رابطه ۱۰}$$

$$Fx^a(Z) = \begin{cases} 0 & Z < VaR_a(X) \\ \dfrac{Fx\,(Z) - \alpha}{1-\alpha} & Z \geq VaR_a(X) \end{cases}$$

$$CVaR_a(X) \approx E\{X | X \geq VaR_a(X)\}$$

حال اگر ارزش در معرض ریسک شرطی جایگزین واریانس شود، الگویی که پیش‌ترگفته شد به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$Min: \lambda\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Z_i W_i Z_j W_j \sigma_{ij}\right] - (1-\lambda)\left[\frac{1}{1-\alpha}\int_{VaR_a\,(X)}^{+\infty} ZF_X(Z)dZ\right] \qquad \text{رابطه ۱۱}$$

$$s.t: \sum_{i=1}^{k} w_i = 1$$

$$W_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \leq K$$

1. Artzner, Delbaen & Jean-Marc
2. Yamai & Yoshiba

$$\varepsilon_i \le W_i \le Y_i$$
$$0 \le \varepsilon_i < Y_i \le 1$$
$$Z_i \in [0.1]$$

الگوی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با معیار «GlueVaR»

در سال‌های اخیر پژوهشگران زیادی تلاش کردند معیارهای مناسبی را برای محاسبه ریسک در بهینه‌سازی پرتفوی فراهم کنند و سوال بحث برانگیز میان متخصصان این است که کدام معیار مناسب می‌باشد. آرتزنر و همکاران (۱۹۹۹) معیاری را برای این منظور ارائه کردند. مسئله مهم‌تر که در میان پژوهشگران مطرح بود، باید هر معیار ریسک در چهار اصل موضوع انسجام صدق کند تا بتوان از آن معیار به‌عنوان یک اندازه ریسک مناسب یاد کرد. این چهار اصل موضوعه، پایایی نسبت به انتقال، یکنواختی، زیرجمع‌پذیری و همگنی مثبت هستند. علاوه بر این ویژگی‌ها، مدیران ویژگی‌های سادگی برآورد، انعطاف‌پذیری بالا، قابلیت سنجش مناسب ریسک در شرایط بحرانی بازار و کارآمدی مناسب در شرایط عادی بازار را برای انتخاب یک معیار سنجش ریسک اشاره کردند. از دیگر مواردی که در توصیف ریسک مهم تلقی می‌شود، بستگی به نگرشی است که در هنگام استفاده از این معیار برای ارزیابی ریسک فرض می‌شود، در واقع می‌توان گفت سطح ریسک پذیرفته شده توسط سرمایه‌گذاران بستگی به ترجیحات شخصی آن‌ها و عوامل اضافی دارد. مزیت GlueVaR در مقایسه با سایر معیار ریسک این است که نگرش سرمایه‌گذار نسبت به ریسک را در نظر می‌گیرد. بدین ترتیب معیار ریسک GlueVaR می‌توان برای سطح احتمال و وزن‌های مختلف داده شده VaR و CVaR بیان شوند. در واقع این معیار ترکیب خطی از سنجه‌های استاندارد ریسک در سطوح اطمینان α و β با فرض $0 < \alpha \le Y_2$ می‌توان بیان کرد (بلزسامپرا و همکاران، ۲۰۱۴).

$$GlueVaR_{\beta.\alpha}^{m_1.m_2}(X) = w_1 CVaR_\beta + w_2 CVaR_\alpha + w_3 VaR_\alpha \qquad \text{رابطه ۱۲)}$$

انتخاب سنجه ریسک بستگی به وزن‌های w_1 و w_2 و w_3 دارد. براساس این وزن‌ها می‌توان نگرش هر سرمایه‌گذار خاص نسبت به ریسک را متوجه شد. بنابراین باتوجه به رابطه فوق می‌توان با انتخاب ضرایب مناسب (وزن‌های w_1 و w_2 و w_3 و سطوح اطمینان (α و β) در این ترکیب خطی و همچنین برآورد معیارهای VaR و CVaR ، معیار ریسک GlueVaR را برآورد کرد. VaR در سطح α ، CVaR در سطح β و CVaR در سطح α در جایی که اوزان w_1 و w_2 و w_3 به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} w_1 = m_1 - \dfrac{(m_2 - m_1)(1-\beta)}{\beta - \alpha} \\ w_2 = \dfrac{(m_2 - m_1)}{\beta - \alpha}(1-\alpha) \\ w_3 = 1 - W_1 - W_2 = 1 - m_2 \end{cases} \qquad \text{رابطه ۱۳)}$$

در جایی که Y_1 و β سطح اطمینان بدین صورت تعریف می‌شود که $\beta \in [0,1]$ و α و $\alpha \ge \beta$ باشد. دو پارامتر اضافی

m_1 و m_2 به‌عنوان بازدیدهایی از عملکرد انحراف تعریف می‌شوند که $m_1 \epsilon [0,1]$ و $m_2 \epsilon [m_1,0]$.

اگر یک سرمایه‌گذار وزن‌های $(w_1,w_2)=(1,0)$ را انتخاب کند ($w_1 =1$ و $w_2 = w_3 = 0$) آن‌گاه GlueVaR به CVaR در سطح β کاهش می‌یابد، آنگاه وی نگرش بسیار محافظه‌کارانه‌ای در قبال ریسک نشان می‌دهد.

برای انتخاب وزن‌های $(w_1,w_2)=(0,1)$ آن‌گاه GlueVaR به CVaR در سطح α کاهش می‌یابد و می‌توان او را محافظه‌کار تعریف کرد.

و سرانجام اگر وی وزن‌های $(w_1,w_2)=(0,0)$ ، آن‌گاه $w_3 =1$ را انتخاب کند، GlueVaR به VaR در سطح α کاهش می‌یابد؛ پس وی نسبت به ریسک، محافظه‌کاری کمتری دارد.

سطح قابل قبول ریسک یک مسئله شخصی است و باید از این طریق مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد. مهم‌تر از همه امکان زیرجمع‌پذیر بودن را بسته به وزن‌های مرتبط فراهم می‌کنند.

همان‌طور که گفته شد معیار ریسک GlueVaR، ترکیبی خطی از VaR و CVaR تعریف شده و از طرفی CVaR یک معیار سنجش ریسک منسجم است. بنابراین زیرجمع‌پذیری بودن GlueVaR در صورتی که w_3 وزن متناظر با VaR_α برابر با صفر است (خوش‌بین، رضایی و رستگارسرخه، ۱۳۹۹).

به‌طورکلی GlueVaR تجزیه‌پذیر است، اگر $\frac{\beta-1}{\beta-\alpha} \le w_1 \le 1$ و $w_1+ w_2 \le 1$ باشد (کرزولک، ۲۰۱۷).

الگوریتم نقطه‌درونی

روش نقطه‌درونی برای یافتن نقطه بهینه ابتدا با عبور از داخل ناحیه شدنی، نقاطی را مورد بررسی قرار می‌دهد تا به یک راه حل نزدیک شده و در نهایت بتواند نقطه بهینه مدنظر را بیابد. همچنین در مدل‌های درجه دوم به‌دلیل مقیاس‌های بزرگ اعداد، پیچیدگی در محاسبات زیاد است و زمان محاسبه در حل مسائل بهینه‌سازی در الگوریتم‌ها افزایش می‌یابد. از این منظر الگوریتم نام‌برده دارای تابع زمان اجرای چندجمله‌ای است و این خود برتری الگوریتم نقطه‌درونی نسبت به دیگر الگوریتم‌هاست. این روش در حال حاضر قوی‌ترین روش در الگوریتم‌های ریاضی برای برنامه‌ریزی غیرخطی در مقیاس‌های بزرگ در نظر گرفته می‌شود (جتپیپاتتناپونگ و سریجانتونگسپری، ۲۰۲۱).

روش نقطه‌درونی برای بهینه‌سازی خطی و غیرخطی از جست‌وجوی خطی برای اعمال همگرایی و از جبرخطی مستقیم (یعنی تجزیه ماتریسی) برای محاسبه مراحل استفاده می‌کند.

در روش‌های نقطه‌درونی برای بهینه‌سازی غیرخطی (درجه‌دوم)، برخی از ایده‌های کلیدی مانند گام‌های اولیه ـ دوگان مستقیماً از برنامه‌ریزی خطی منتقل و اجرا می‌شود. از این رو در ادامه مطالب ابتدا روش نقطه‌درونی در بهینه‌سازی خطی به اختصار توضیح داده می‌شود.

روش اولیه ــ دوگان

الف) برنامه‌ریزی خطی

مسئله برنامه‌ریزی خطی به شکل استاندارد زیر در نظر گرفته می‌شود:

رابطه ۱۴)
$$\min\ \mu^T x$$
$$s.t: Ax = b, \quad X \geq 0$$

که μ و x بردارهایی در R^n و b برداری در R^m و A ماتریس $m \times n$ با رتبه سطری کامل است. مسئله دوگان رابطه ۱۴ به‌صورت زیر است:

رابطه ۱۵)
$$\max\ b^T \lambda$$
$$s.t: A^T \lambda + s = \mu, \quad S \geq 0$$

که λ برداری در R^m و s برداری در R^n است. جواب‌های رابطه‌های ۱۴ و ۱۵ طبق شرایط کاروش، کیون، تاکر (KKT)[1] به‌صورت زیر مشخص می‌شوند:

رابطه ۱۶) $$A^T \lambda + s = \mu$$

رابطه ۱۷) $$Ax = b$$

رابطه ۱۸) $$x_i s_i = 0, (i = 1, \dots, n)$$

رابطه ۱۹) $$(x, s) \geq 0$$

در روش‌های اولیه ـ دوگان جواب‌های (x^*, λ^*, s^*) برای این دستگاه معادلات با اعمال انواع روش نیوتن برای حل سه رابطه ۱۶ تا ۱۸ و تغییر جهت‌های جست‌وجو و طول گام‌ها به‌گونه‌ای انجام می‌شود که نابرابری‌های $(x, s) > 0$ به‌طور اکید در هر تکرار برقرار شوند. رابطه ۱۶ تا ۱۸ خطی یا غیرخطی خفیفی هستند، بنابراین حل آن‌ها به تنهایی دشوار نیست. با این حال، همه پیچیدگی‌ها در طراحی و تحلیل روش‌های نقطه‌درونی زمانی بروز می‌کند که شرط غیرمنفی رابطه ۱۹ اضافه شود.

برای استخراج روش‌های نقطه‌درونی اولیه ـ دوگان، شرایط بهینه رابطه ۱۶ تا ۱۸ با استفاده از نگاشت F از R^{2n+m} به R^{2n+m} به شکل کمی متفاوت بیان می‌شود:

رابطه ۲۰) $$F(x, \lambda, s) = \begin{bmatrix} A^T \lambda + s - \mu \\ Ax - b \\ XSe \end{bmatrix} = 0$$

رابطه ۲۱) $$(x, s) \geq 0$$

که در آن:

---

۱. شرایط کاروش، کیون، تاکر (KKT) : هر نقطه‌ای که مینیمم و بهینه باشد، در آن نقطه بهینه شرایط KKT برقرار است. $C_i(x)=0$ قیدهای که برای تساوی برقرار باشد، $C_i(x)>0$ قیدهای که برای نامساوی برقرار باشد، $\lambda_i \geq 0$ ضرایب لاگرانژ نامنفی باشد، $C_i(x)\lambda=0$ یعنی $C_i(x)=0$ یا $\lambda=0$ ، در نقطه مینیمم مشتق تابع لاگرانژی صفر است.

$$X = diag\,(x_1, x_2, \dots, x_n)\,, S = diag\,(s_1, s_2, \dots, s_n)$$ رابطه ۲۲

و $e = (1,1,1,\dots,1)^T$. روش‌های اولیه ـ دوگان تکرارهای (x^k, λ^k, s^k) را تولید می‌کنند؛ به‌طوری که کران‌های رابطه ۲۱ را به‌طور اکید برآورده می‌کند، یعنی $x^k > 0$ و $s^k > 0$. این ویژگی منشأ اصطلاح نقطه‌درونی است.

بسیاری از الگوریتم‌های تکراری در بهینه‌سازی همچون روش‌های نقطه‌درونی اولیه ـ دوگان دارای دو جزء اساسی هستند: یک روش برای تعیین گام و یک محک مطلوبیت برای هر نقطه در فضای جست‌وجو. یک مؤلفه مهم برای محک مطلوبیت، مقدار میانگین حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دو x_is_i برای $i=1,2,\dots,n$ است که همگی تحت شرط $x > 0$ و $s > 0$ مثبت هستند. این کمیت به‌عنوان محک دوگان شناخته شده و به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i s_i = \frac{x^T s}{n}$$ رابطه ۲۳

منشأ تعیین جهت جست‌وجو، به روش نیوتن برای حل دستگاه معادلات غیر خطی رابطه ۲۰ باز می‌گردد. روش نیوتن یک مدل خطی برای F در اطراف نقطه جاری تشکیل و جهت جست‌وجو $(\Delta x, \Delta\lambda, \Delta s)$ را با حل دستگاه معادلات خطی زیر به‌دست می‌آورد:

$$J(x,\lambda,s)\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta\lambda\\ \Delta s\end{bmatrix} = -F(x,\lambda,s)$$ رابطه ۲۴

که در آن J ژاکوبین F است. اگر از نماد r_c و r_b برای دو ردیف بلوک اول در F استفاده شود، یعنی:

$$r_b = Ax - b, r_c = A^T\lambda + s - \mu$$ رابطه ۲۵

می‌توان رابطه ۲۴ را به شکل زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix}0 & A^T & I\\ A & 0 & 0\\ S & 0 & X\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta\lambda\\ \Delta s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r_c\\ -r_b\\ -XSe\end{bmatrix}$$ رابطه ۲۶

معمولاً یک گام کامل در این جهت، کران $(x,s) \geq 0$ را نقض می‌کند، بنابراین یک جست‌وجوی خطی در راستای امتداد نیوتن اجرا شده و یک تکرار جدید به ازای مقداری از $\alpha \in (0,1]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x,\lambda,s) + \alpha(\Delta x, \Delta\lambda, \Delta s)$$ رابطه ۲۷

اغلب می‌توان فقط یک قدم کوچک در این جهت $(\alpha \ll 1)$ قبل از نقض شرط $(x,s) > 0$ برداشت.

اکثر روش‌های اولیه ـ دوگان از جهت نیوتنی خفیف‌تر استفاده می‌کنند. مسیری که مستقیماً جواب‌های رابطه ۱۶ تا ۱۸ را در نظر ندارد، بلکه نقطه‌ای را در نظر می‌گیرد که حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دو x_is_i به مقدار میانگین پایین‌تر کاهش می‌یابند و نه اینکه، کلاً صفر شوند. به‌طور خاص، یک گام نیوتن به سمت نقطه‌ای برداشته می‌شود که در آن $x_is_i = \sigma\delta$

و δ معیار دوگان جاری و $\sigma \in [0,1]$ ضریب کاهشی است که با هدف محک دوگان در این مرحله (تکرار) به‌دست می‌آید. معادله گام اصلاح شده بدین صورت است:

رابطه ۲۸)
$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_c \\ -r_b \\ -XSe + \sigma\delta e \end{bmatrix}$$

متغیر σ طبق دلایلی که در زیر مطرح شده است پارامتر مرکزیت نام گرفته است.

زمانی که $\sigma > 0$ باشد معمولاً می‌توان قبل از نقض کران‌های $(x,s) \geq 0$، یک گام بلندتر α در امتداد جهت تعریف شده توسط روش نقطه‌درونی اولیه ـ دوگان برداشت.

ب) برنامه‌ریزی درجه دوم محدب

روش نقطه‌درونی را می‌توان برای برنامه‌های درجه‌دوم محدب از طریق تعمیم الگوریتم‌های برنامه‌ریزی خطی اعمال کرد. روش نقطه‌درونی اولیه ـ دوگان حاصل، از جمله الگوریتم‌هایی است که به سادگی بیان می‌شوند و برای حل بسیاری از مسائل کارآمدند. فرم درجه دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

رابطه ۲۹)
$$min\, q(x) = \frac{1}{2}x^T G x + x^T \mu$$

رابطه ۳۰)
$$s.t{:}\ Ax \geq b$$

G ماتریس متقارن و نیمه معین مثبت است و A ماتریس m×n و b بردار سمت راست به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = [a_i]_{i \epsilon I}\ ;\ \ b = [b_i]_{i \epsilon I}\ ;\ I = \{1, 2, .., m\}$$

با توجه به شرایط KKT برای این مسئله، هر جواب آن به ازای برخی مقادیر ضرایب لاگرانژی λ_i، $i = 1,\ldots,m$ در شرایط مرتبه اول زیر صدق می‌کند.

$$Gx - A^T\lambda + \mu = 0$$
$$Ax - b \geq 0$$
$$(Ax - b)_i \lambda_i = 0\, , i = 1,2, \ldots, m$$
$$\lambda_i \geq 0$$

با تعریف بردار کمکی $y \geq 0$ می‌توان این شرایط را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

رابطه ۳۱)
$$Gx - A^T\lambda + \mu = 0$$

رابطه ۳۲)
$$Ax - y - b = 0$$

رابطه ۳۳)
$$y_i \lambda_i = 0\, , i = 1, 2 \ldots, m$$

رابطه ۳۴) $(y,\lambda) \ \geq \ 0$

با توجه به اینکه G نیمه معین مثبت فرض شده است، این شرایط KKT نه تنها لازم‌اند، بلکه کافی هم هستند. بنابراین می‌توان برنامه درجه‌دوم محدب رابطه ۲۹ و ۳۰ را با یافتن جواب‌های دستگاه معادلات رابطه ۳۱ تا ۳۴ حل کرد.

با توجه به تکرار فعلی (x, y, λ) که $(y, \lambda) > 0$ را برآورده می‌کند، می‌توان یک محک مکمل δ را با به‌صورت رابطهٔ ۳۵ تعریف کرد.

رابطه ۳۵) $$\delta \ = \frac{y^T\lambda}{m}$$

روش‌های تعقیب مسیر اولیه ـ دوگان با در نظر گرفتن شرایط KKT اختلال یافته به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

رابطه ۳۶) $$F(x, y, \lambda\,;\ \sigma\,\delta) = \begin{bmatrix} Gx - A^T\lambda + \mu \\ Ax - y - b \\ \Upsilon\Lambda e - \sigma\delta e \end{bmatrix} = 0$$

جایی که: $e = (1,1,1, \dots ,1)^T$ ، $\Lambda = diag\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots , \lambda_m)$ ، $\Upsilon = diag\ (y_1, y_2, \dots , y_m)$ و $\sigma\epsilon[0.1]$.
جواب‌های رابطه ۳۶ برای همه مقادیر مثبت σ و δ مسیر مرکزی تعریف می‌کند که وقتی $\sigma\ \delta$ به سمت صفر میل می‌کند، این مسیر به حل برنامه درجه دوم منتهی می‌شود.

با ثابت گرفتن δ و اعمال روش نیوتن برای رابطه ۳۶ دستگاه خطی رابطه ۳۷ به‌دست می‌آید.

رابطه ۳۷) $$\begin{bmatrix} G & 0 & -A^T \\ A & -I & 0 \\ 0 & \Lambda & \Upsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -r_p \\ -\Lambda\Upsilon e + \sigma\delta e \end{bmatrix}$$

جایی‌که:

رابطه ۳۸) $$r_d = \ Gx - A^T\lambda + \mu\,.\ r_p = \ Ax - y - b$$

تکرار بعدی با تنظیم فرمول ذیل به‌دست می‌آید.

رابطه ۳۹) $$(x^+, y^+, \lambda^+) = (x, y, \lambda) \ + \ \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta\lambda)$$

که در آن α برای حفظ نابرابری $(y^+, \lambda^+)>0$ و احتمالاً برای برآوردن شرایط مختلف دیگر انتخاب می‌شود. در ادامه زمینه‌های مختلف ارتقای تکرار اولیه–دوگان که در عمل به اجرای مؤثر آن می‌انجامد، پرداخته می‌شود.

انتخاب طول گام[1]

روش‌های نقطه‌درونی برای برنامه‌ریزی خطی در صورتی کارآمدتر هستند که طول گام‌های مختلف α^{Pri} و α^{dual} برای متغیرهای اولیه ـ دوگان به‌کار گرفته شوند، بنابراین، بیشترین کاهش در باقی‌مانده‌ها با انتخاب بزرگ‌ترین مقدار طول گام‌های اولیه ـ دوگان قابل قبول به‌دست می‌آید. در برنامه‌نویسی درجه دوم وضعیت متفاوت است.

1. Step Length section

از گزینه‌های حل این معضل استفاده از طول گام‌های مساوی مانند رابطه ۳۹ و تنظیم $\alpha = \min(\alpha_\tau^{pri}, \alpha_\tau^{dual})$ است، جایی که:

رابطه ۴۰) $\alpha_\tau^{pri} = max\{\alpha\epsilon(0.1]:\ y+\alpha\Delta y \ \geq\ (1-\tau)y\}$

رابطه ۴۱) $\alpha_\tau^{dual} = max\{\alpha\epsilon(0.1]:\ \lambda+\alpha\Delta\lambda \ \geq\ (1-\tau)\lambda\}$

پارامتر $\tau \in (0,1)$ میزان عقب‌نشینی از طول گام ماکزیمم را کنترل می‌کند؛ به‌طوری که شرایط $y + \alpha\Delta y \geq 0$ و $\lambda + \alpha\Delta\lambda \geq 0$ برآورده شوند.

روش عملی اولیه ـ دوگان

معمول‌ترین روش نقطه درونی برای QP محدب بر اساس روش پیشگو ـ اصلاح‌گر مهروترا[1] است. ابتدا با تنظیم $\sigma = 0$ در **Error! Reference source not found.**رابطه ۳۷ یک مرحله مقیاس‌بندی افین $(\Delta x^{aff}, \Delta y^{aff}, \Delta\lambda^{aff})$ محاسبه می‌شود. این مرحله با محاسبه یک مرحله روش پیشگو ـ اصلاح‌گر که به‌دنبال همان استدلال منتهی به رابطه ۴۲ تعریف شد، بهبود می‌یابد.

رابطه ۴۲) $$\begin{bmatrix} G\ 0 & -A^T \\ A & -I\ \ 0 \\ 0\ \Lambda & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x^{cor} \\ \Delta\lambda^{cor} \\ \Delta s^{cor} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta X^{aff}\Delta S^{aff} e \end{bmatrix}$$

در مرحله بعد، پارامتر σ با استفاده از رابطه $\sigma=\left(\frac{\delta_{aff}}{\mu}\right)^3$ محاسبه می‌شود. کل گام با حل دستگاه زیر به‌دست می‌آید.

رابطه ۴۳) $$\begin{bmatrix} G & 0 & -A^T \\ A & -I & 0 \\ 0 & \Lambda & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -r_p \\ -\Lambda Y e - \Delta\Lambda^{aff}\Delta Y^{aff} e + \sigma\delta e \end{bmatrix}$$

اکنون الگوریتم مشخص می‌شود. برای سادگی در توضیحات فرض شده طول گام‌های مساوی در متغیرهای اولیه و دوگان استفاده می‌شود.

الگوریتم پیش‌بینی کننده ـ اصلاح‌گر برای برنامه‌ریزی درجه دوم:

در ابتدا نقطه (x_0,y_0,λ_0) با مقادیر $(y_0,\lambda_0) > 0$ در نظر گرفته می‌شود. سپس عملیات زیر به‌طور متوالی تا برقراری شرط توقف برای تکراری $k = 0, 1, 2, \ldots$ انجام می‌پذیرد.

(x, y, λ) را با (x_k, y_k, λ_k) قرار داده و با اختیار $\sigma = 0$ رابطه ۳۷ برای $(\Delta x^{aff}.\Delta y^{aff}.\Delta\lambda^{aff})$ حل می‌شود. در ادامه $\delta=\frac{y^T\lambda}{m}$ و $\hat{\alpha}_{aff} = max\{\alpha\epsilon(0,1] \mid (y,\lambda) +\ \alpha\left(\Delta y^{aff}, \Delta\lambda^{aff}\right) \ \geq\ 0\}$ و $\delta_{aff} = \left(y + \hat{\alpha}_{aff}\Delta y^{aff}\right)^T(\lambda + \hat{\alpha}_{aff}\Delta\lambda^{aff}) / m$ محاسبه می‌شوند. حال پارامتر مرکزی مساوی $\sigma = (\delta_{aff}/\delta)^3$ قرار می‌گیرد و رابطه ۴۳ برای $(\Delta x.\Delta y.\Delta\lambda)$ حل می‌شود.

1. Mehrotra

در نهایت $\tau_k \in (0.1)$ انتخاب و $\hat{\alpha} = \min\left(\alpha_{\tau_k}^{pri}.\alpha_{\tau_k}^{dual}\right)$ قرار داده می‌شود. بدین ترتیب نقطه تکراری جدید به‌صورت $(x_{k+1}.\ y_{k+1}.\ \lambda_{k+1}) = (x_k.\ y_k.\ \lambda_k) + \hat{\alpha}(\Delta x.\Delta y.\Delta\lambda)$ به‌دست می‌آید.

جامعه و نمونه آماری

در این پژوهش از قیمت پایانی تعدیل شده شرکت‌های منتخب برای محاسبه شاخص ۵۰ شرکت برتر و فعال بورس استفاده شد. به‌کمک نرم‌افزار TSEclient داده‌های مربوط به قیمت‌های روزانه سهام شرکت‌های فوق، در بازه زمانی سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۴۰۰ جمع‌آوری شد. سازمان بورس اوراق بهادار تهران هر سه ماه یک بار، فهرست ۵۰ شرکت برتر بورس را که بالاترین درجه نقدشوندگی و بیشترین تناوب معاملاتی را دارند، ارائه منتشر می‌کند. استفاده از این شرکت‌ها که مورد توجه بسیاری از سرمایه‌گذاران است، کارایی نتایج پژوهش حاضر را نیز ارتقا می‌دهد. زمان مدنظر برای انتخاب ۵۰ شرکت برتر، بهمن ۱۴۰۰ لحاظ شد؛ اما با اعمال شرط در دسترس بودن کامل داده‌های قیمتی روزانه در دوره مورد مطالعه در نهایت اطلاعات مربوط به ۳۳ شرکت از جمع ۵۰ شرکت برتر بورس جمع‌آوری شد. جدول زیر اسامی ۳۳ شرکت مورد مطالعه در این پژوهش را نشان می‌دهد.

جدول ۱. اسامی ۳۳ شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران

ردیف	نام شرکت	نماد شرکت	ردیف	نام شرکت	نماد شرکت
۱	پتروشیمی شازند	شاراک	۱۸	گروه مینا (سهامی عام)	رمپنا
۲	سرمایه‌گذاری گروه توسعه ملی	وبانک	۱۹	گروه مدیریت سرمایه‌گذاری وامید	وامید
۳	سرمایه‌گذاری غدیر	وغدیر	۲۰	پتروشیمی فناوران	شفن
۴	ایران خودرو	خودرو	۲۱	کشتیرانی جمهوری اسلامی ایران	حکشتی
۵	پتروشیمی خارک	شخارک	۲۲	پالایش نفت اصفهان	شپنا
۶	گروه بهمن	خبهمن	۲۳	مخابرات ایران	اخابر
۷	سرمایه‌گذاری صندوق بازنشستگی	وصندوق	۲۴	بانک ملت	وبملت
۸	سایپا	خساپا	۲۵	بانک تجارت	وتجارت
۹	توسعه معادن و فلزات	ومعادن	۲۶	بانک صادرات ایران	وبصادر
۱۰	معدنی و صنعتی چادرملو	کچاد	۲۷	پالایش نفت تبریز	شبریز
۱۱	معدنی و صنعتی گل‌گهر	کگل	۲۸	شرکت اعتبارات سیار ایران	همراه
۱۲	بانک پارسیان	وپارس	۲۹	پتروشیمی پردیس	شپدیس
۱۳	پتروشیمی شیراز	شیراز	۳۰	بانک پاسارگاد	وپاسار
۱۴	گسترش سرمایه‌گذاری ایران خودرو	خگستر	۳۱	توسعه معادن و ص. معدنی خاورمیانه	میدکو
۱۵	ملی صنایع مس ایران	فملی	۳۲	صنایع پتروشیمی کرمانشاه	کرماشا
۱۶	فولاد مبارکه اصفهان	فولاد	۳۳	گسترش نفت و گاز پارسیان	پارسان
۱۷	فولاد خوزستان	فخوز			

برای محاسبه بازده سهام از رابطه زیر استفاده شده است:

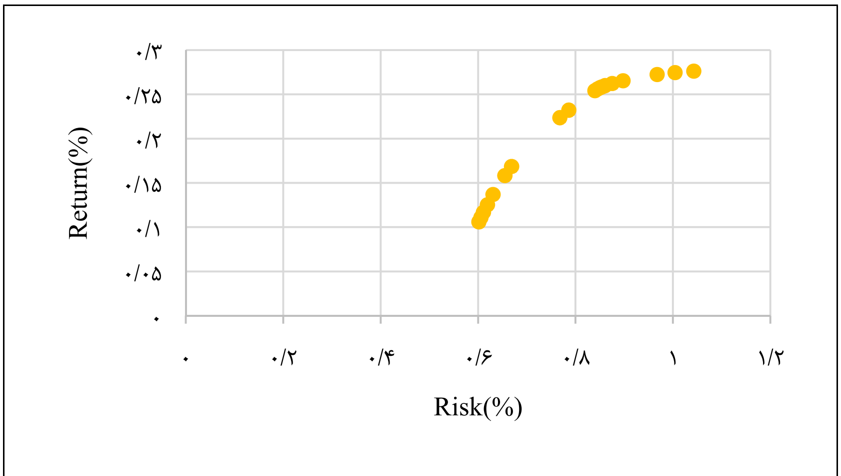
رابطه ۴۴)
$$\mu = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \times 100$$

در این رابطه μ بازده هرسهم، P_t قیمت سهام در روز t ام و P_{t-1} قیمت سهام در روز t-1 است.

یافته‌های پژوهش

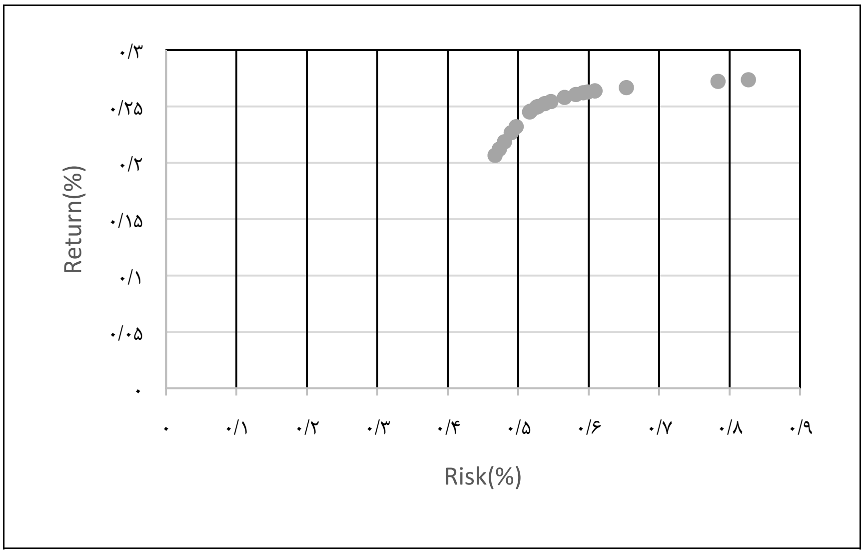
به‌منظور دست یابی به مرزکارای پرتفوی‌های بهینه متشکل از بین ۳۳ شرکت برتر و بررسی آن از الگوریتم ریاضی نقطه درونی و معیار ریسک GlueVaR استفاده شده است. همچنین برای نشان دادن کارایی معیار محاسبه ریسک GlueVaR در حل مسئله بهینه‌سازی، خروجی الگوریتم با سایر معیارهای محاسبه ریسک سبد سهام همچون واریانس (Var)، ارزش در معرض خطر (VaR) و ارزش در معرض خطر شرطی (CVaR) مورد مقایسه قرار گرفته است. پرتفوی کارا به معنای ترکیب بهینه سهام در یک سبد است بدین صورت که به ازای یک مقدار ریسک معین، بازده حداکثر و به ازای هر مقدار معین از بازدهی ریسک حداقل داشته باشد، برهمین اساس، مرز کارا مشخص می‌شود. ریسک و بازده ۳۳ شرکت فعال در بازار بورس در جدول ۱، به‌عنوان ورودی‌های الگوریتم نقطه‌درونی محسوب می‌گردند. شایان ذکر است که الگوریتم پیشنهادی در نرم افزار MATLAB R2021b برنامه‌نویسی و اجرا گردیده و در نهایت نتایج به‌دست آمده در قالب نحوه تخصیص بهینه سرمایه به سهام مختلف به همراه ریسک و بازده هر سهم گزارش شده است. در ادامه مرزکارای حاصل از ترکیب سبدسهام بهینه به‌دست آمده از اجرای الگوریتم نقطه‌درونی (IP) برای مدل دوهدفه با ۴ معیار ریسک واریانس، VaR، CVaR و GlueVaR ارائه می‌شود.

شکل‌های ۱ تا ۴، به ترتیب منحنی مرزکارای سرمایه‌گذاری را به ازای چهار مدل فوق‌الذکر نشان می‌دهند.

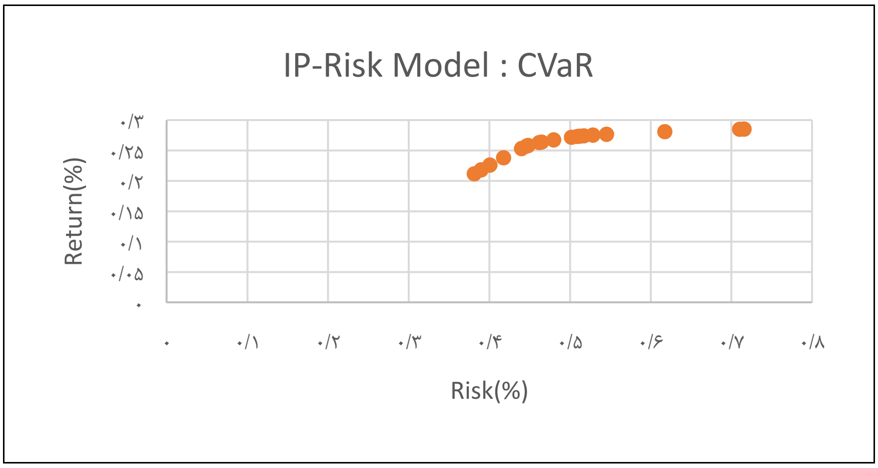


شکل ۱. مرز کارای سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوی میانگین ـ واریانس و الگوریتم بهینه‌سازی نقطه‌درونی

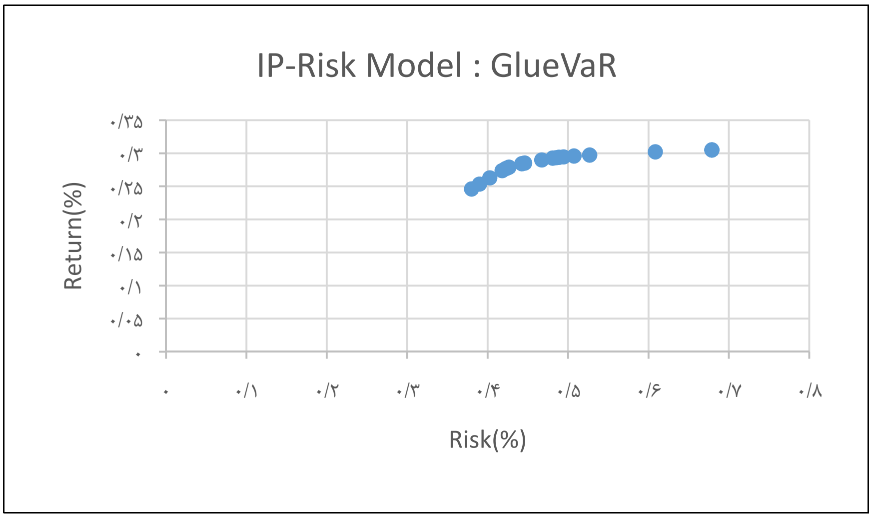
همان‌طور که در قسمت مدل بهینه‌سازی پرتفوی دو هدفه بیان شد؛ در این مدل پارامتر غیرمنفی k به‌عنوان ضریب ریسک در نظر گرفته می‌شود و این مقدار به ترجیحات شخصی سرمایه‌گذار بستگی دارد. سرمایه‌گذاران محافظه‌کار که تأکید زیادی برای حداقل رساندن ریسک در پرتفوی خود دارند، برای افزایش وزن واریانس در عملکرد هدف، مقادیر زیاد را برای k انتخاب می‌کنند و برعکس آن، سرمایه‌گذاران جسور که به امید بازگشت بازده بالاتر، آماده پذیرش ریسک بیشتر هستند، مقادیر کمتر k را انتخاب می‌کنند. در این مقاله مقادیر k در بازه عددی بین ۱ و ۰ انتخاب شده‌اند.



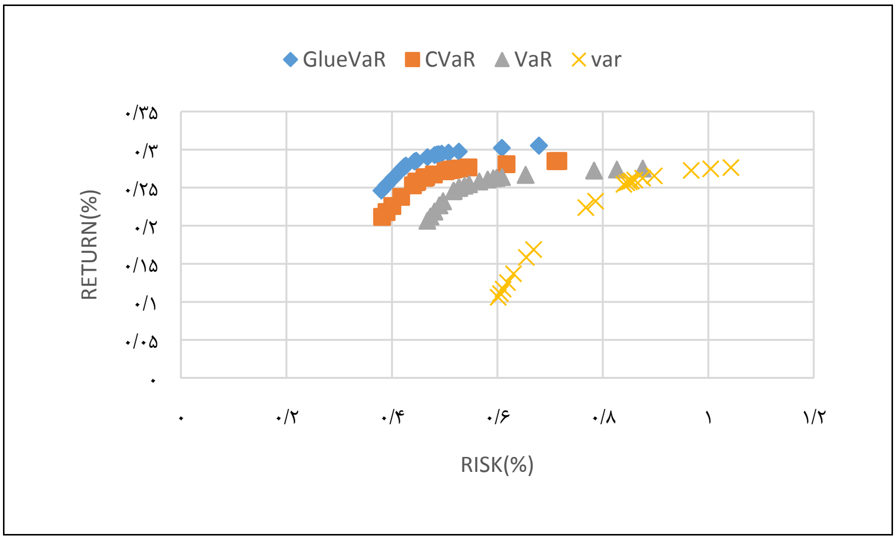
شکل ۲. مرز کارای سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوی میانگین ـ ارزش در معرض ریسک و الگوریتم بهینه‌سازی نقطه‌درونی



شکل ۳. مرز کارای سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوی میانگین- ارزش در معرض ریسک شرطی و الگوریتم بهینه‌سازی نقطه‌درونی



شکل ٤. مرز کارای سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوی میانگین GlueVaR و الگوریتم بهینه‌سازی نقطه‌درونی



شکل ۵. مقایسه مرز کارای سرمایه‌گذاری با چهار مدل ریسک MV، VaR، CVaR و GlueVaR با الگوریتم نقطه‌درونی

جدول ۲ نیز نحوه تخصیص سرمایه، برای تشکیل برخی از پرتفوی‌های بهینه مستقر در منحنی کارا که با استفاده از مدل GlueVaR تشکیل یافته اند را نشان می‌دهد (برای سایر معیارهای محاسبه ریسک نیز جداول مشابهی می‌توان ارائه کرد که به جهت رعایت اختصار آورده نشده است). بخش اول این جدول شامل ۱۰ پورتفوی اول مستقر در خط کارای سرمایه گذاری بوده و پورتفوهای از شماره ۱۱ تا ۲۰ نیز در قسمت دوم جدول ۲ گزارش شده است. ردیف اول جدول در هر دو بخش نیز شماره هر سبد سهام را نشان می‌دهد. در این جداول اعداد ستونی ذیل هر پورتفولیو نیز که با

حرف W_i نشان داده شده است بیانگر میزان سرمایه تخصیص داده شده به هریک از ۳۳ سهم مورد استفاده برای تشکیل پورتفوی بهینه است. همان طور که پیش‌بینی‌شده بود، افراد محافظه‌کار که از k های بزرگ‌تر و نزدیک به ۱ استفاده می‌کنند، پرتفوی‌هایی را انتخاب خواهند کرد که در قسمت ابتدایی نمودار مرزکارا قرار دارند و سرمایه‌گذاران ریسک‌پذیر با اختصاص k های نزدیک به صفر، پرتفوی‌های را به‌دست می‌آورند که در قسمت بالایی نمودار مرزکارا قرار دارند و دارای ریسک بالا و به تبع آن دارای بازدهی مورد انتظار بالاتری نیز هستند.

با مقایسه توأم پرتفوی‌های بهینه ونیز منحنی‌های کارای تشکیل یافته بر اساس ۴ روش محاسبه ریسک، در شکل ۵ می‌توان پی‌برد که مدل ریسک GlueVaR به ازای در نظر گرفتن یک مقدار ریسک مشخص، سبدی با بازدهی بالاتر نسبت به پرتفوی‌های بهینه تشکیل یافته بر اساس ۳ معیار دیگر ریسک ارائه می‌دهد. این امر خود نشان‌دهنده عملکرد بالای پرتفوی‌های بهینه تشکیل شده بر اساس محاسبه ریسک به روش GlueVaR است. شاید یکی از دلایل توجیه این امر مربوط به ناکارایی نسبی هریک از روش‌های محاسبه ریسک در مقایسه با روش GlueVaR باشد. مدل میانگین واریانس که از مدل‌های مشهور مباحث بهینه‌سازی پرتفوی توسط مارکوییتز است فرض می‌کند توزیع متغیر تصادفی بازده مورد انتظار و توزیع داده‌ها نرمال است در حالی که این شرط در بازار سهام معمولاً محقق نمی‌شود. از طرف دیگر بنا به تعریف، ریسک نامطلوب، احتمال نوسان‌های منفی بازدهی در آینده است. بنابراین، اگر متغیر تصادفی نرمال نباشد استفاده از مدل ریسک نامطلوب مناسب خواهد بود. هرچند روش‌های VaR، CVaR از معیارهای محاسبه ریسک نامطلوب هستند، اما معیار VaR در توانایی محاسبه ریسک‌های بیشتر و فراتر از ارزش در معرض ریسک را ندارد و معیار CVaR نیز نسبت به ارزش در معرض ریسک محافظه‌کارانه بوده و زیان پیش‌بینی شده در آن فراتر از VaR است و اندازه ریسک را بیشتر از آنچه هست اندازه‌گیری می‌کند که این خود باعث هدر رفتن سرمایه‌های شرکت‌ها می‌شود؛ در حالی که معیار ریسک GlueVaR معیار ریسک نامطلوبی است که با درک سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک مطابقت بیشتری دارد. همچنین الزامی به نرمال فرض کردن توزیع داده‌ها نیست و انعطاف‌پذیری بالایی نسبت به دیگر معیارهای ریسک دارد.

الگوریتم نقطه‌درونی سبدهای مختلف را طراحی و آن‌ها را براساس دو هدف ریسک و بازده رتبه‌بندی می‌کند و سپس از بین این سبدهای سهام به‌دست آمده سبدهای مغلوب حذف و ریسک و بازده مربوط به سبدهای غالب برای رسم مرز کارای سرمایه‌گذاری به‌عنوان سبدسهام بهینه نامغلوب انتخاب می‌شوند. جدول ۳ و شکل ۴ برای مدل دوهدفه میانگین GlueVaR نشان می‌دهند که از بین جواب‌های پیدا شده ۲۰ جواب به‌عنوان جواب‌های نامغلوب انتخاب شده و برای رسم مرز کارا سرمایه‌گذاری به کار رفته است؛ از این رو سرمایه‌گذاران براساس تمایلات ریسک‌پذیری و ریسک‌گریزی و اینکه آیا در زمره سرمایه‌گذاران محافظه‌کار و یا جسور محسوب می‌شوند، می‌توانند سبد بهینه خود را از بین سبدهای مستقر در روی مرزکارای به‌دست‌آمده انتخاب کنند. سبدهایی که حداکثر بازده را دارند، ریسک حداکثر و برعکس سبدهایی که بازده حداقل دارند، ریسک حداقل خواهند داشت.

جدول ۲. ترکیب سبدسهام بهینه پیشنهادی در مرز کارای سرمایه‌گذاری براساس مدل دوهدفه میانگین– GlueVaR با استفاده از الگوریتم نقطه‌درونی

	۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰
W_1	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_2	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_3	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_4	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_5	۰/۱۰۶۲	۰/۰۸۲۸	۰/۰۵۳۲	۰/۰۱۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_6	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_7	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_8	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_9	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{10}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{11}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{12}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{13}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۲۹۶
W_{14}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{15}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{16}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{17}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{18}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{19}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{20}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{21}	۰/۴۵۳۳	۰/۴۵۷۲	۰/۴۶۰۸	۰/۴۷۱۳	۰/۴۷۶۲	۰/۴۷۶۳	۰/۴۷۶۴	۰/۴۷۶۸	۰/۴۷۶۹	۰/۴۷۳۶
W_{22}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{23}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{24}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{25}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{26}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{27}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{28}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{29}	۰/۰۹۲۷	۰/۰۶۳۳	۰/۰۲۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{30}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{31}	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۴۴	۰/۰۱۷۷	۰/۰۳۶۶	۰/۰۵۴۲	۰/۰۹۳۶	۰/۱۲۴۹	۰/۲۹۰۲	۰/۳۱۸۲	۰/۴۳۰۸
W_{32}	۰/۳۴۷۷	۰/۳۹۲۴	۰/۴۴۱۴	۰/۴۸۰۱	۰/۴۶۹۶	۰/۴۳	۰/۳۹۸۷	۰/۲۳۲۹	۰/۲۰۴۹	۰/۰۶۶
W_{33}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$\sum W_i$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
ریسک	۰/۶۷۸۹۳۲	۰/۶۷۸۹۱۲	۰/۶۷۸۸۳	۰/۶۰۸۵۹۶	۰/۵۲۶۸۷۸	۰/۵۰۷۳۵۲	۰/۴۹۴۳۸۲	۰/۴۸۸۶۵۴	۰/۴۸۵۰۶۶	۰/۴۸۰۸۵۷
بازده	۰/۳۰۵۰۲۸	۰/۳۰۵۰۲۷	۰/۳۰۵۰۲۴	۰/۳۰۲۰۲۵	۰/۲۹۷۲۷۳	۰/۲۹۵۷۳۸	۰/۲۹۴۴۷۸	۰/۲۹۳۸۰۳	۰/۲۹۳۳۱۶	۰/۲۹۲۶۱۹

ادامهٔ جدول ۲

	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
W_1	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_2	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_3	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_4	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_5	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_6	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_7	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_8	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_9	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{10}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{11}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{12}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{13}	۰/۰۸۵۳	۰/۱۲۸۵	۰/۱۵۸۷	۰/۲۰۰۵	۰/۲۷۸۵	۰/۳۷۳۷	۰/۶۶۸۱	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۹	۱
W_{14}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{15}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{16}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{17}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{18}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{19}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{20}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{21}	۰/۴۵۹۴	۰/۴۲۹۲	۰/۴۰۸۱	۰/۳۷۸۹	۰/۳۲۴۳	۰/۲۵۸۷	۰/۰۵۲	۰	۰	۰
W_{22}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{23}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{24}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{25}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{26}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{27}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{28}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{29}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{30}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{31}	۰/۴۵۵۳	۰/۴۴۲۳	۰/۴۳۳۲	۰/۴۲۰۶	۰/۳۹۷۲	۰/۳۶۸۵	۰/۲۷۹۹	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۱	۰
W_{32}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
W_{33}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
$\sum W_i$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
ریسک	۰/۴۶۷۲۸۱	۰/۴۴۶۰۳۱	۰/۴۴۲۵۱۴	۰/۴۲۶۴۹۸	۰/۴۲۴۳۲۵	۰/۴۲۲۱۱۹	۰/۴۲۷۹۸۱	۰/۴۰۲۶۹۶	۰/۳۸۹۸۲	۰/۳۷۹۹۸۳
بازده	۰/۲۸۹۹	۰/۲۸۵۱۳۸	۰/۲۸۴۲	۰/۲۷۸۸۵	۰/۲۷۷۸۸۵	۰/۲۷۶۵۵	۰/۲۷۳۷۱۴	۰/۲۶۲۸۰۶	۰/۲۵۳۳۶۶	۰/۲۴۵۹۸۸

جدول ۳ نیز تعداد تکرارهای الگوریتم نقطه‌درونی در حل مسائل بهینه‌سازی دوهدفه را به تفکیک هر یک از معیارهای ریسک نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود در تمام معیارهای ریسک تعداد دفعات تکرار در بازه حدود ۵ تا ۱۲ تکرار است. دلیل کمتر بودن تکرارها نشان‌دهنده قوی بودن الگوریتم نقطه‌درونی در یافتن نقاط بهینه در نمودار مرز کارا و سرعت بالای و کارایی مناسب الگوریتم نقطه‌درونی در حل مدل بهینه‌سازی با اهداف متعارض (حداقل‌سازی ریسک و حداکثرسازی بازده) است.

جدول ٤. تکرارهای الگوریتم نقطه‌درونی در یافتن نقطه بهینه با ٤ معیار ریسک MV، VaR، CVaR و GlueVaR

تکرارهای الگوریتم نقطه درونی	MV	VaR	CVaR	GlueVaR
۱	۱۱	۱۰	۱۰	۱۱
۲	۱۱	۱۰	۱۱	۱۱
۳	۱۲	۱۰	۱۱	۱۰
۴	۱۲	۱۰	۱۰	۱۰
۵	۱۱	۱۰	۱۰	۹
۶	۱۱	۱۰	۹	۸
۷	۱۰	۹	۸	۸
۸	۱۰	۸	۸	۸
۹	۱۰	۸	۸	۸
۱۰	۱۰	۸	۹	۸
۱۱	۹	۸	۸	۸
۱۲	۸	۸	۷	۶
۱۳	۸	۱۰	۶	۶
۱۴	۸	۸	۶	۵
۱۵	۸	۷	۵	۵
۱۶	۸	۶	۵	۶
۱۷	۸	۶	۷	۷
۱۸	۶	۸	۸	۸
۱۹	۶	۷	۷	۷
۲۰	۷	۷	۷	۷

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش توانمندی الگوریتم ریاضی نقطه درونی در تشکیل پرتفوی‌های بهینه با استفاده از معیار ریسک GlueVaR بررسی شد. همان طور که پیش‌تر مطرح شد، برای رفع انتقاد از دو معیار CVaR و VaR، معیار جدید ریسک GlueVaR پیشنهاد شد که ترکیب خطی دو معیار نام برده است. به‌دلیل انعطاف‌پذیری بالا، معیار GlueVaR در مسائل مالی جایگزین مناسبی برای دو معیار قبلی شناخته شد و از مهم‌ترین مزایای معیار ریسک GlueVaR داشتن ویژگی انسجام و کارآمدی مناسب در شرایط عادی و بحرانی بازار است. این معیار نگرش سرمایه‌گذار را نسبت به ریسک

در نظر می‌گیرد (آرتزنر و همکاران، ۱۹۹۹) و طبق مقالات آقامحمدی و همکاران (۱۳۹۶)، هانگ و یین (۲۰۱۹) و کرزولک و ترزپونت (۲۰۱۷) و غیره، پی بردند که معیار ریسک GlueVaR ، معیار بهتری برای محاسبه ریسک است. برای حل مدل بهینه‌سازی پرتفوی از الگوریتم نقطه‌درونی استفاده شد. همان طور که بیان شد، این الگوریتم در مقیاس‌های بزرگ، قوی‌ترین الگوریتم شناخته شده و در حل مسائل درجه دوم تابع زمان اجرای آن به‌صورت چندجمله‌ای است و به‌دلیل پایین بودن دفعات تکرار در انجام محاسبات مسائل، پیچیدگی کمتری دارد (لو و همکاران، ۲۰۰۹).

یی ـ شوای و وانگ (۲۰۲۲)، کاردوس (۲۰۲۰)، دمون و همکاران (۲۰۲۰) نشان دادند که الگوریتم نقطه‌درونی، اغلب بهترین راه‌های عددی را در کوتاه‌ترین زمان و مقیاس‌های بزرگ ارائه می‌دهد که پیش‌تر به تفضیل توضیح داده شد. برای بررسی بیشتر، نتایج حاصل با روش‌های دیگر ریسک محاسبه و عملکرد مدل‌ها مقایسه شد.

برای این منظور از داده‌های روزانه قیمت پایانی تعدیل شده مربوط به ۵۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی سال ۱۳۹۰ تا ۱۴۰۰ نیز استفاده شد که با اعمال فیلتر عدم خروج شرکت‌ها در جمع ۵۰ شرکت برتر بورس در طول دوره مورد مطالعه در نهایت ۳۳ شرکت به‌عنوان نمونه نهایی انتخاب گردید.

نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که الگوریتم ریاضی نقطه درونی با استفاده از معیار ریسک GlueVaR در یافتن جواب‌های بهینه و نامغلوب و ایجاد سبدسهام با بازدهی بالا و ریسک کمتر توانمندی مؤثری دارد و هر سرمایه‌گذار طبق ترجیحات شخصی می‌تواند سبدی را که با مطلوبیت خود مطابقت دارد انتخاب کند. نتایج حاصل شده همچنین حاکی از این موضوع است که پرتفوی‌های بهینه ایجاد شده با معیار GlueVaR نسبت به سه معیار سنجش ریسک VaR، CVaR و Var (واریانس) عملکرد بهتری دارند. شایان ذکر است الگوریتم بهینه‌سازی نقطه‌درونی، به‌دلیل پایین بودن دفعات تکرار در انجام محاسبات مسائل، پیچیدگی کمتری دارد که این خود توانمندی و قوی بودن این الگوریتم را نشان می‌دهد.

با توجه به نتایج پژوهش حاضر که نشان‌دهندهٔ توانمندی الگوریتم نقطه‌درونی در حل مدل‌های بهینه‌سازی پورتفولیو است، پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های آتی، کارآمدی این الگوریتم، با الگوریتم‌های فراابتکاری که امروزه به‌طور گسترده‌ای در پژوهش‌های مرتبط با بهینه‌سازی پورتفولیو مورد استفاده قرار می‌گیرند، مقایسه شود.

منابع

آقامحمدی، علی؛ سجودی، مهدی؛ سجودی، میثم و طاووسی، محمدجواد (۱۳۹۶). معرفی معیار ریسک جدید GlueVaR و برآورد آن با استفاده از مدل رگرسیونی چندکی ترکیبی. *مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۸ (۳۱)، ۱۷-۱.

آصفی، سپهر؛ فلاح تفتی، سپهر؛ باقری کاظم آبادی، محمدرضا؛ فلاح‌پور، سیما (۱۳۹۷). بهینه‌سازی سبدسهام با استفاده از الگوریتم فراابتکاری نهنگ با معیار ریسک ریزش مورد انتظار. *فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۹(۳۷)، ۱۱۰-۱۳۲.

احمدی اقدم، محمد؛ تقی‌زاده یزدی، محمدرضا؛ فلاح پور، سعید. (۱۳۹۵). انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از برنامه ریزی فراآرمانی و برنامه‌ریزی آرمانی ترتیبی توسعه یافته. *تحقیقات مالی*، ۱۸(۴)، ۵۹۱- ۶۱۲.

اقبال‌نیا، محمد (۱۳۸۴). *طراحی مدلی برای مدیریت ریسک سرمایه‌گذاری در بورس اوراق‌بهادار تهران با استفاده از مفهوم ارزش در معرض ریسک*. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، گروه مدیریت مالی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران.

خوش‌بین، رسول؛ رضایی، فرزین؛ رستگار سرخه، محمدعلی (۱۳۹۹). مدیریت ریسک نقدینگی در عملیات بازار باز بـانکی بـا معیـار GlueVaR. *فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۴۵، ۱۹۹- ۲۲۳.

دریائی، فاطمه؛ عطائی، علیرضا؛ اسکروچی، محمدرضا (۱۳۹۹). یک الگوریتم جدید مبتنی بر روش نقطه درونی بـرای حـل مسـائل بهینه‌سازی نیمه نامتناهی. *سیزدهمین کنفرانس بین‌المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیـات*، ۱۶ الـی ۱۹ شـهریور ۱۳۹۹، دانشگاه صنعتی شاهرود.

راعی، رضا (۱۳۸۵). انتخاب سبد سرمایه ریسکی با استفاده از شبکه‌های عصبی. *بررسی‌های حسابداری و حسابرسـی*، ۱۳(۴)، ۷۰- ۸۳.

راعی، رضا؛ نمکی، علی؛ احمدی؛ مؤمن (۱۴۰۱). پیاده‌سازی رویکرد استوا نسبی برای انتخاب پرتفوی بهینه در بورس اوراق بهـادار تهران با استفاده از برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه‌دوم. *تحقیقات مالی*، ۲۴(۲)، ۱۸۴- ۲۱۳.

رضایی، اسعداله؛ فلاحتی، علی؛ سهیلی، کیومرث (۱۳۹۷). بهینه‌سازی سبدسهام بـا اسـتفاده از الگـوریتم تجمـع ذرات سـه هدفـه. *فصلنامه نظریه‌های کاربردی اقتصاد*، ۵(۴)، ۳۱-۵۲.

رهنمای رودپشتی، فریدون؛ چاوشی، کاظم؛ صابر، ابراهیم (۱۳۹۳). بهینه‌سازی پرتفوی متشکل از سهام صندوق‌های سرمایه‌گذاری مشترک بورس اوراق‌بهادار تهران با رویکرد الگوریتم ژنتیک. *فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گـذاری*، ۳(۱۲)، ۲۱۷- ۲۳۱.

سینایی، حسنعلی و سعید، زمانی (۱۳۹۳). تصمیم‌گیری برای انتخاب سـبد سـهام و مقایسـه الگـوریتم‌هـای ژنتیـک و زنبورعسـل. *پژوهشنامه علمی پژوهشی مدیریت اجرایی*، ۶ (۱۱)، ۸۳-۱۰۲.

شیرکوند، سعید؛ فدائی، حمیدرضا (۱۴۰۱). بهینه‌سازی سبدسهام با به کارگیری مدل‌هـای چنـد متغیـره و امگـا ـ ارزش در معـرض ریسک شرطی بر پایه ملاک حداقل حداکثر پشیمانی. *تحقیقات مالی*، ۲۴(۱)، ۱-۱۷.

طالب‌نیا، قدرت اله؛ فتحی، مریم (۱۳۸۹). ارزیابی مقایسه‌ای انتخاب پرتفوی بهینه سهام در بـورس اوراق‌بهـادار تهـران از طریـق مدل‌های مارکوییتز و ارزش در معرض خطر. *مجله دانش مالی تحلیل اوراق بهادار* (مطالعات مالی)، ۳(۶)، ۷۱-۹۳.

عبدالعلی‌زاده شهیر، سیمین؛ عشقی، کوروش (۱۳۸۲). کاربرد الگوریتم ژنتیک در انتخاب یک مجموعه دارایی از سهام بـورس اوراق بهادار. *فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران*، ۵(۱۷)، ۱۷۵-۱۹۲.

علی‌پور جورشری، ارمغان؛ یاکیده، کیخسرو؛ محفـوظی، غلامرضـا (۱۳۹۶). بررسـی عملکـرد مـدل هـای مـارکوییتز و GMD در انتخاب پرتفوی بهینه. *دومین کنفرانس بین‌المللی مدیریت صنعتی*، ۳۰ و ۳۱ فروردین، دانشگاه مازندران.

قندهاری، مریم؛ آذر، عادل؛ یزدانیان، احمدرضا و گل ارضی، غلامحسین (۱۳۹۸). ارائـه ترکیبـی از برنامـه ریـزی پویـای تصـادفی تقریبی و الگوریتم ژنتیک در بهینه‌سازی چند مرحله‌ای سبدسهام با معیـار ریسـک GlueVaR. *مـدیریت صـنعتی*، ۱۱(۳)، ۵۱۷- ۵۴۲.

کریمی، مریم (۱۳۸۶). *بهینه‌سازی پرتفوی با استفاده از مدل ارزش در معرض خطر در بورس اوراق‌بهادار تهران*. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم‌اجتماعی و اقتصادی، دانشگاه الزهرا، تهران.

گل‌ارضی، غلامحسین؛ انصاری، حمیدرضا (۱۴۰۱). مقایسه عملکرد الگوریتم‌های تکاملی NSGAII و SPEA2 در انتخاب پرتفولیو بهینه در بورس اوراق بهادار تهران. *تحقیقات مالی*، ۲۴(۳)، ۴۱۰- ۴۳۰.

نشاطی‌زاده، لعیا؛ حیدری، حسن (۱۳۹۸). بررسی معیارهای نوسان‌پذیری و ریسک در مدل‌های بهینه‌سازی مقید با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری. *فصلنامه مدل‌سازی اقتصادسنجی*، ۳ (۴)، ۱۱-۳۵.

نیلچی، مسلم؛ فرید، داریوش؛ زارع، محمدحسن (۱۳۹۸). ارزیابی مقایسه ای رویکرد مارکوییتز با یک روش ترکیبی به‌منظور تشکیل پرتفوی بهینه با کاربرد یادگیری عمیق DNN و الگوریتم جست‌وجوی گرانشی. *نشریه چشم‌انداز مدیریت مالی*، ۹(۴)، ۱۶۵-۱۸۸.

هاشمی نژاد؛ سیدعلی، باقرپور؛ مرتضی (۱۳۹۸). تعیین سبد بهینه سرمایه گذاران خطرپذیر براساس روش ترکیبی مدل‌سازی عامل محور و جست‌وجوی هارمونی اصلاح شده. *تحقیقات مالی*، ۲۱ (۴)، ۴۹۳- ۵۱۶.

References

Abdul Alizadeh Shahir, S. & Eshghi, K. (2012). Application of Genetic Algorithm in the selection of a set of assets from Stock Exchange stocks. *Iran Economic Research Quarterly*, 5(17), 175-192. (*in Persian*)

Agha Mohammadi, A., Sojodi, M., Sojodi, M. & Tavousi, M.J. (2016). Introducing the new GlueVaR risk measure and its estimation using the combined quantile regression model, *Journal of Financial Engineering and Securities Management*, 8(31), 1-17. (*in Persian*)

Ahmadi Aghdam, M., Taghizadeh Yazdi, M. & Fallahpour, S. (2015). Choosing the optimal portfolio using meta-optimal planning and extended sequential optimal planning. *Journal of Financial Research,* 18 (4), 591-612. (*in Persian*)

Alipour Jourshari, A., Yakideh, K. & Mahfovi, G. R. (2016). Investigating the performance of Markowitz and GMD models in choosing the optimal portfolio. *The second international industrial management conference*, April 30 and 31, Mazandaran University. (*in Persian*)

Aqbal-Nia, M. (2004). *Designing a model for investment risk management in Tehran Stock Exchange using the concept of value at risk*. Master's thesis, Department of financial management, Shahid Beheshti University, Tehran. (*in Persian*)

Artzner, P.H., Delbaen Freddy, E. & Jean-Marc, H.D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Journal of Mathematical Finance*, 9(3), 203-228.

Asefi, S., Fallah Tafti, S., Bagheri Kazemabadi, M. & Fallahpour, S. (2017). Optimizing portfolios using the meta-heuristic algorithm of the whale with the criterion of expected drop risk. *Quarterly Journal of Financial Engineering and Securities Management*, 9(37), 110-132. (*in Persian*)

Belles – Sampera, J., Guillen, M. & Santolino, M. (2014). Beyond Value-at-Risk: GlueVaR distortion risk measure. *Risk Analysis*, 34 (1), 121-134.

Belles-Sampera, J., Guillen, M. & Santolino, M. (2016). The use of flexible quantile-based measures in risk assessment. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 45(6), 1670-1681.

Belles-Sampera, J., Guillen, M. & Santolino, M. (2014). GlueVaR risk measures in capital allocation applications. *Mathematics and Economics,* 58:132-37.

Campbel, R., Huisman, R. & Koedijk, K. (2001). Optimal portfolio selection in a value-at-risk framework. *Journal of Banking and Finance*, 25, 1789-1804.

Cornuejols, G. Pena, J. & Tütüncü, R. (2018). *Optimization methods in finance* (2nd Ed.). Cambridge University Press.

Daryaei, F., Atai, A. & Scroochi, M.R. (2019). A new algorithm based on the interior point method for solving semi-infinite optimization problems. *The 13th International Conference of the Iranian Association for Operations Research,* 16-19 September 2019, Shahrood University of Technology. (*in Persian*)

Demone, C., Di Matteo, O. & Collignon, B. (2020). *Classical Decomposition of Markowitz Portfolio Selection.* Https://dio.org/10.34989/swp-2020-21.

Erica, E., Handari, B. D. & Hertono, G. F. (2018). Agglomerative Clustering and Genetic Algorithm in Portfolio Optimization. *AIP Conference Proceedings* 2023, 02017, Https://dio.org/10.1063/1.506421.

Ghandehari, M., Azar, A., Yazdanian, A. R., & Golarzi, GH. (2018). Presenting a combination of approximate stochastic dynamic programming and genetic algorithm in multi-stage optimization of portfolios with GlueVaR risk criterion. *Industrial Management*, 11 (3), 517-542. (*in Persian*)

Golarzi, G. & Ansari, H. (2022). Performance comparison of Non-dominated sorting genetic algorithm with strength Parto evolutionary algorithm in selecting optimal portfolios in Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, 24(3), 410-430. (*in Persian*)

Gondzio, J. & Grothey, A. (2007). Solving Nonlinear Portfolio Optimization Problems with the Primal-Dual Interior Point Method. *European Journal of Operational Research,*181(3), 1019-1029.

Hasheminejad, S. A., & Bagherpour, M. (2020). Venture Capital Portfolio Optimization through Hybrid Approach of Agent-Based Modeling and Modified Harmony Search. *Financial Research Journal*, *21*(4), 493-516. doi: 10.22059/frj.2019.277295.1006833 (*in Persian*)

Huang, Y. & Yin, C. (2019). Optimal reciprocal reinsurance under GlueVaR distortion risk measures. *Journal of Mathematical Finance*, 9(1), 11-24.

Jetpipattanapong, D. & Srijuntongsiri, G. (2021). An efficient method to compute search directions of an infeasible primal-dual path-following interior-point method for large-scale block diagonal quadratic programming. *Journal of Science & Technology*, 43(5), 1449-1455.

Jia, J. & Dyer, J.S. (2000). A standard measure of risk and risk-value models. *Management*

Science, 42 (12), 1691-1705.

Kardos, J. (2020). *High-performance interior point methods.* Doctoral Dissertation, Faculty of Informatics, University della Svizzera, Italiana.

Karimi, M. (2007). *Portfolio optimization using the value-at-risk model in Tehran Stock Exchange.* Master's thesis, Faculty of Social and Economic Sciences, Al-Zahra University, Tehran. (*in Persian*)

Khoshbin, R., Rezei, F. & Rastakhiz Sorkhe, M. (2021). Liquidity risk management in open banking market operations with GlueVaR criteria. *Financial Engineering and Securities Management Quarterly,* 45:199-223.

Krezolek, D. & Trzpiot, G. (2017). The Effectiveness of the GlueVaR Risk Measure on the Metals – the Application of Omega Performance Measure. *Journal of Folia Oeconomica*, 5(331), 153-167.

Krezolek, D. (2017). The use of Value-at-Risk methodology in the assessment of investor's risk attitudes on the precious metals market. *Journal of Ekonometria Econometrics*, 3(57), 101-112.

Lau, M. S. K., Yue, S. P., Ling, K. V. & Maciejowski, J. M. (2009). A Comparison of Interior Point and Active Set Methods for FPGA Implementation of Model Predictive Control. *European Control Conference (ECC)*, Budapest, Hungary, August 23-26, 156-161.

Li, D. (2016). Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multiperiod Mean Variance Formulation. *Mathematical Finance*, 10(5), 387-406.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7 (1), 77 – 91.

Neshatizadeh, L. & Heydari, H. (2018). Investigating volatility and risk criteria in constrained optimization models using colonial competition algorithm. *Econometric modeling*, 3(4), 11-35. (*in Persian*)

Nilchi, M., Farid, D. & Zare, M. H. (2018). Comparative evaluation of Markowitz approach with a hybrid method to form optimal portfolio using DNN deep learning and gravity search algorithm. *Journal of Financial Management Perspectives*, 9(4), 165-188. (*in Persian*)

Nocedal, J. & Wright, S. (2006). *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, Printed in the United States of America.

Raei, R. (2006). Risk capital portfolio selection using neural networks. *Accounting and auditing reviews*, 13(4), 70-83. (*in Persian*)

Raei, R., Namaki, A. & Ahmadi, M. (2022). Applying the Relative Robust Approach for Selection of Optimal Portfolio in the Tehran Stock Exchange by Second-order Conic Programming. *Financial Research Journal,* 24(3), 184-213. (*in Persian*)

Rahnemaye Rudposhti, F., Chavoshi, K. & Saber, A. (2013). Optimization of the portfolio consisting of shares of joint investment funds of the Tehran Stock Exchange with the approach of genetic algorithm. *Scientific Research Quarterly of Investment Knowledge*, 3(12), 217-231. (*in Persian*)

Rezaei, A., Falahati, A. & Sohaili, K. (2017). Optimizing stocks using a three-objective particle aggregation algorithm. *Quarterly Journal of Applied Economic Theories*, 5(4), 31-52. (*in Persian*)

Shirkund, S. & Fedai, H. (2022). Optimizing portfolios using multivariate models and omega-value under conditional risk based on minimum maximum regret criteria. *Journal of Financial Research*, 24(1), 1-17. (*in Persian*)

Sinayi, H.A. & Zamani, S. (2013). Decision-making for stock portfolio selection and comparison of genetic and bee algorithms. *Executive Management Scientific Research Journal*, 6 (11), 102-83. (*in Persian*)

Takehara, H. (1993). An interior point algorithm for large-scale portfolio optimization. *Annals of Operations Research,* 45: 373-386.

Taleb-nia, G. & Fathi, M. (2010). Comparative evaluation of optimal stock portfolio selection in Tehran Stock Exchange through Markoitz and value at risk models. *Journal of Financial Knowledge of Securities Analysis (Financial Studies)*, 3(6), 71-93. (*in Persian*)

Woodside – Oriakhi, M. Lucas, C. Beasly, J. E. (2011). Heuristic Algorithms for the cardinality constrained efficient, frontier. *European Journal of Operational Research*, 213 (3), 538 – 550.

Yamai, Y. & Yoshiba, T. (2002). On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall. *Monetary and Economic Studies*, 20 (1), 57-85.

Yin, C. & Zhu, D. (2016). *A new class of distortion risk measures and their tail asymptotics with emphasis on VaR*. dio.org/10.48550/arXiv.1503.08586.

Yi-Shuai, N. Wang, Y. J. (2022). Higher-order Moment Portfolio Optimization via an Accelerated Difference-of-Convex Programming Approach and Sums-of-Squares. *Mathematics of Operations Research*.