Financial Research Journal

Print ISSN: 1024-8153

Online ISSN: 2423-5377

# Multi-Criteria Fuzzy Portfolio Optimization Considering Varying Levels of Investor Expectations

**Ali Namaki ***

*Corresponding Author, Assistant Prof., Department of Financial Engineering, Faculty of Accounting and Financial Sciences, College of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: alinamaki@ut.ac.ir

**Saeid Shirkavand**

Associate Prof., Department of Finance and Insurance, Faculty of Accounting and Financial Sciences, College of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: shirkavnd@ut.ac.ir

**Amirsina Jirofti**

Ph.D. Candidate, Department Financial Engineering, Kish International Campus, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: amirsina.jirofti@ut.ac.ir

## Abstract

### Objective

The objective of the present research is the optimization of investment portfolios, considering all significant criteria for investors in a fuzzy environment, and taking into account various levels of investor expectations for each criterion based on their risk preferences. On one hand, the utilization of fuzzy logic in modeling this problem can enhance its alignment with real-world conditions by accommodating uncertainty in input data. On the other hand, the proposed model for portfolio selection incorporates not only risk and return as key factors for investors but also considers other important factors. These factors include short-term and long-term returns, liquidity, maximum and minimum investment ratios in each asset, dividend distribution, and cardinality constraint (the number of assets within the portfolio). Another objective of this research is to present an innovative model compared to existing ones by incorporating a logistic fuzzy membership function to

**Citation:** Namaki, Ali, Shirkavand, Saeid & Jirofti, Amirsina (2025). Multi-Criteria Fuzzy Portfolio Optimization Considering Varying Levels of Investor Expectations. *Financial Research Journal*, 27(1), 1-30. https://doi.org/10.22059/FRJ.2024.372592.1007574 (*in Persian*)

Financial Research Journal, 2025, Vol. 27, No.1, pp. 1-30
Published by University of Tehran, Faculty of Management
https://doi.org/10.22059/FRJ.2024.372592.1007574
Article Type: Research Paper


Received: February 13, 2024
Received in revised form: May 05, 2024
Accepted: August 12, 2024
Published online: March 18, 2025

model various levels of investor expectations. This enables the formation of investment portfolios based on the priorities of investors with different risk appetites regarding different criteria.

**Methods**

The method of conducting this research involves initially addressing the optimization modeling of a nonlinear multi-objective problem in a fuzzy environment, considering all crucial factors for investors. Subsequently, employing quantitative methods and the foundations of fuzzy logic, we transform the problem into a single-objective linear problem, making it amenable to solution using conventional optimization methods and software. Ultimately, utilizing data from the 50 most active companies on the Tehran Stock Exchange (TSE) market, we implement the model and analyze the results.

**Results**

The research results indicate that the proposed model yields a return more than twice that of the index of the 50 most active companies on the Tehran Stock Exchange (TSE) for both aggressive and conservative investors. Additionally, the model, by incorporating a logistic-shaped membership function for various problem objectives, can be customized for investors with aggressive (risk-tolerant) or conservative (risk-averse) strategies. This customization is attributed to a parameter that determines the shape of the membership function in logistic functions, allowing the prioritization of different factors such as risk, short-term and long-term returns, liquidity, or dividend distribution for investors with varying levels of risk tolerance.

**Conclusion**

The utilization of logistic-shaped membership functions in a fuzzy environment, along with diverse criteria, can personalize the investment portfolio selection model for investors with different characteristics. This customization enables investors with various risk tolerances to construct a portfolio according to their priorities. This adaptability significantly enhances the practical applicability of the portfolio selection problem in the real world. Furthermore, employing computational methods and fuzzy principles allows the transformation of a nonlinear multi-objective problem into a single-objective linear model, facilitating its implementation and resolution.

**Keywords:** Fuzzy logistic membership function, Investment portfolio optimization, Multi-criteria portfolio.

شاپا چاپی: ۱۰۲۴-۸۱۵۳
شاپا الکترونیکی: ۲۴۲۳-۵۳۷۷
تحقیقات مالی

# بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری چندمعیاره فازی با درنظر گرفتن سطوح مختلف انتظارات سرمایه‌گذار

**علی نمکی***
* نویسندهٔ مسئول، استادیار، گروه مهندسی مالی، دانشکده حسابداری و علوم مالی، دانشکدگان مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: alinamaki@ut.ac.ir

**سعید شیرکوند**
دانشیار، گروه مالی و بیمه، دانشکده حسابداری و علوم مالی، دانشکدگان مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: shirkavnd@ut.ac.ir

**امیرسینا جیرفتی**
دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مالی، پردیس بین‌المللی کیش، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: amirsina.jirofti@ut.ac.ir

## چکیده

**هدف:** هدف از پژوهش حاضر، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با درنظر گرفتن تمامی معیارهای با اهمیت برای سرمایه‌گذار، در یک محیط فازی با لحاظ‌کردن سطوح مختلف انتظارات سرمایه‌گذار برای هر یک از معیارها بر اساس ریسک‌پذیری آن‌هاست. بر این اساس، از یک طرف، استفاده از منطق فازی در مدل‌سازی این مسئله، به‌دلیل درنظر گرفتن‌عدم قطعیت در داده‌های ورودی، می‌تواند به افزایش تطابق مسئله با شرایط دنیای واقعی منجر شود. از طرف دیگر، در مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری ارائه‌شده، علاوه‌بر ریسک و بازده، به‌عنوان دو عامل کلیدی برای سرمایه‌گذار، برخی عوامل مهم دیگر درنظر گرفته خواهد شد تا بتواند معیارهای مختلف برای سرمایه‌گذار، از جمله ریسک، بازده کوتاه‌مدت و بلندمدت، نقدشوندگی، بیشینه و کمینه نسبت سرمایه‌گذاری روی هر دارایی، سود تقسیمی و محدودیت کاردینالیتی (تعداد دارایی‌های داخل پرتفوی) را لحاظ کند. هدف دیگر این پژوهش، ارائهٔ مدلی نوآورانه نسبت به مدل‌های موجود با درنظر گرفتن تابع عضویت لاجستیک شکل فازی، به‌منظور مدل‌سازی سطوح انتظارات مختلف سرمایه‌گذاران است تا بتواند سبد سرمایه‌گذاری را بر اساس اولویت سرمایه‌گذاران با درجه ریسک‌پذیری مختلف نسبت به معیارهای متفاوت تشکیل دهد.

**روش:** روش انجام این پژوهش بدین ترتیب است که ابتدا به مدل‌سازی یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه غیرخطی، در یک محیط فازی با درنظر گرفتن تمامی عوامل مهم برای سرمایه‌گذار پرداخته می‌شود. سپس با استفاده از روش‌های کمّی و مبانی منطق فازی، مسئله را به یک مسئلهٔ خطی تک هدفه تبدیل می‌کنیم تا با استفاده از روش‌ها و نرم‌افزارهای معمول، بهینه‌سازی قابل حل باشد. در نهایت با استفاده از شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر بورس اوراق بهادار، به پیاده‌سازی مدل و تحلیل نتایج خواهیم پرداخت.

**استناد:** نمکی، علی؛ شیرکوند، سعید و جیرفتی، امیرسینا (۱۴۰۴). بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری چندمعیاره فازی با درنظر گرفتن سطوح مختلف انتظارات سرمایه‌گذار. *تحقیقات مالی*، ۲۷(۱)، ۱-۳۰.

تحقیقات مالی، ۱۴۰۴، دوره ۲۷، شماره ۱، صص. ۱- ۳۰
ناشر: دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
نوع مقاله: علمی پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۲۴
تاریخ ویرایش: ۱۴۰۳/۰۲/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۲۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۱۲/۲۸
doi: https://doi.org/10.22059/FRJ.2024.372592.1007574

**یافته‌ها:** یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد که مدل ارائه‌شده برای هر دو سرمایه‌گذار ریسک‌پذیر و محافظه‌کار، نسبت به شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر بورس اوراق بهادار، بازدهی بیش از دو برابری دارد. علاوه‌براین، مدل ارائه‌شده، به‌دلیل درنظر گرفتن تابع عضویت لاجستیک‌شکل، برای اهداف مختلف مسئله می‌تواند برای سرمایه‌گذاران با استراتژی تهاجمی (ریسک‌پذیر) یا محافظه‌کار (ریسک‌گریز) شخصی‌سازی شود. دلیل این موضوع وجود پارامتر تعیین شکل تابع عضویت در توابع لاجستیک‌شکل است که می‌تواند اولویت عوامل مختلف از جمله ریسک، بازده کوتاهمدت و بلندمدت، نقدشوندگی یا سود تقسیمی را برای سرمایه‌گذاران مختلف با سطوح متفاوت ریسک‌پذیری مشخص کند.

**نتیجه‌گیری:** استفاده از توابع عضویت لاجستیک‌شکل، در محیط فازی و معیارهای مختلف می‌تواند مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را برای سرمایه‌گذاران با ویژگی‌های مختلف شخصی‌سازی کند تا سرمایه‌گذاران با سطوح مختلف ریسک‌پذیری، بتوانند یک سبد سرمایه‌گذاری مطابق با اولویت‌های خود را تشکیل دهند. این موضوع به کاربردی شدن مسئلهٔ انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در دنیای واقعی کمک بسزایی می‌کند. همچنین با استفاده از روش‌های محاسباتی و اصول فازی، می‌توان مسئلهٔ چندهدفهٔ غیرخطی را به یک مدل تک‌هدفه خطی تبدیل کرد تا پیاده‌سازی و حل آن تسهیل شود.

**کلیدواژه‌ها:** بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری، تابع عضویت لاجستیک فازی، سبد سرمایه‌گذاری چند معیاره.

## مقدمه

توسعهٔ روزافزون بازارهای پول و سرمایه و همچنین طراحی انواع ابزارهای جدید مالی، موجب گسترش مباحث مالی در بین صاحب‌نظران و عموم علاقه‌مندان به بازار سرمایه شده است. در این میان، سرمایه‌گذاری به‌عنوان یک تصمیم مالی، سال‌هاست که توجه متخصصان این حوزه را به خود معطوف کرده است. در دهه‌های اخیر، با افزایش سرعت به‌روزرسانی علم مالی و اقتصاد و به‌تبع آن طراحی و استفاده از روش‌ها و ابزارهای نوین مالی، مفهوم سرمایه‌گذاری، گسترده‌تر و هوشمندانه‌تر از قبل شده است؛ به‌طوری که تمام فعالان عرصهٔ سرمایه‌گذاری در پی شناسایی روش‌های سرمایه‌گذاری هستند که ضمن به ارمغان آوردن بیشترین بازده، ریسک سرمایه‌گذاری را به کمترین میزان تقلیل دهد.

یکی از رویکردهای کاربردی در جهت نیل به اهداف سرمایه‌گذاران، تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بوده که از مسائل کلاسیک و مهم در زمینهٔ تصمیم‌گیری مالی تلقی می‌شود. مفاهیم بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری، همواره نقش بسزایی در زمینهٔ توسعه و درک بهتر تصمیمات سرمایه‌گذاری داشته است. در سال‌های اخیر، مدل‌ها و روش‌های گوناگونی به‌منظور بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه شده که هر یک در جهت بهبود و رفع نقص‌های موجود، توسط سایر روش‌ها و مدل‌ها جایگزین شده‌اند. مواجهه با عدم قطعیت حاکم بر بازارهای مالی در مدل‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از مفاهیم نظریه فازی و لحاظ کردن معیارهای اقتصادی در مدل‌های مزبور و نیز بهره‌گیری از روش‌های نوین بهینه‌سازی در حل این مدل‌ها، از جمله مواردی است که در مدل‌سازی مسئله تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بهینه رایج شده است. در میان مدل‌های موجود، موضوعی که سبب برتری یک مدل بر مدل‌ها و روش‌های دیگر می‌شود، کاربردی بودن مدل، میزان تطابق بالای آن با واقعیت و برآورده کردن هر چه بیشتر اولویت‌ها و مطلوبیت‌های مد نظر سرمایه‌گذاران است. به عبارت دیگر، لحاظ کردن ویژگی‌های مذکور در مدل‌های انتخاب سبدسرمایه‌گذاری سبب می‌شود که سرمایه‌گذاران و مدیران سرمایه‌گذاری بتوانند با اطمینان بیشتری سیاست‌های سرمایه‌گذاری بهینه را اتخاذ کنند.

همان گونه که عنوان شد، به‌دلیل آنکه اطلاعات در دسترس در مورد دارایی‌ها و سایر موضوعات مرتبط در بازارهای مالی اغلب کامل نیست و بازارهای مالی دائم در معرض تغییراتی قرار دارند، بازده انتظاری دارایی‌های مالی و به‌طبع آن بازده انتظاری پرتفوی سرمایه‌گذاری، به‌طور دقیق قابل اندازه‌گیری نیستند. بنابراین درنظر گرفتن قطعیت در پارامترهای مربوط به مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری موجب ناکارآمد شدن مدل‌سازی می‌شود. از جمله راه‌های مواجهه با این عدم قطعیت، می‌توان به توابع توزیع احتمال و منطق فازی اشاره کرد. از آنجا که بازده دارایی‌ها، دارای انحراف‌های پیوسته و سیستماتیکی از توزیع نرمال است، استفاده از توابع توزیع احتمال مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را به مسئله‌ای پیچیده تبدیل کرده که مواجهه با آن، امری دشوار برای مدیران سرمایه‌گذاری است؛ اما استفاده از منطق فازی با استفاده از تابع عضویت تا حدود زیادی موجب رفع این پیچیدگی شده و می‌تواند روش مناسبی برای مدل‌سازی عدم قطعیت در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری شود. در نتیجه می‌توان در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری جهت مواجه‌شدن با این عدم قطعیت از منطق فازی استفاده کرد.

همچنین علاوه‌بر ریسک و بازده عوامل مؤثر دیگری در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری نقش دارند. این عوامل می‌توانند موجب ایجاد مدل چندمعیاره برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری شوند. از جمله این عوامل می‌توان به نرخ بازده بلندمدت، نرخ بازده کوتاه‌مدت، نقدشوندگی، حداقل و حداکثر نسبت سرمایه‌گذاری روی هر دارایی، تعداد دارایی‌های داخل پرتفوی و سود تقسیمی اشاره کرد. درنظر گرفتن پارامترهای فوق در مدل، موجب کاربردی کردن مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری خواهد شد.

نکتهٔ دیگری که درخصوص بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری اهمیت دارد، درنظر گرفتن انتظارات سرمایه‌گذار بر اساس اولویت‌های هر یک است. در مدل‌های موجود انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، عموماً سبد بهینه بدون درنظر گرفتن انتظارات سرمایه‌گذاران و فقط، بر اساس اطلاعات موجود در هریک از دارایی‌ها تشکیل می‌شود. درحالی که برخی از سرمایه‌گذاران، در مقایسه با دیگران ریسک‌پذیری بیشتری دارند و به‌دنبال بازده کوتاه‌مدت بالاترند. همچنین ممکن است که برخی از سرمایه‌گذاران، به‌دنبال نقدشوندگی بالاتری باشند و پارامتر نقدشوندگی پرتفولیو، اولویت بیشتری نسبت به بازده بالاتر برای آن‌ها داشته باشد. اما مدل‌های موجود، عموماً به تمامی این سرمایه‌گذاران، یک سبد بهینه را پیشنهاد می‌کند. بر این اساس می‌توان با درنظر گرفتن تابع عضویت لاجستیکی و تعیین پارمترهای آن‌ها سبدهای متفاوتی برای سرمایه‌گذاران با انتظارات مختلف بر اساس اولویت آن‌ها بهینه کرد.

در پژوهش حاضر مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چند معیاره با درنظر گرفتن محدودیت‌ها و توابع هدف کاربردی در محیط فازی با استفاده از توابع عضویت لاجستیک، برای سرمایه‌گذاران با انتظارات و اولویت‌های مختلف مدل‌سازی می‌شود. به عبارت بهتر در مدل پژوهش موجود، ابتدا به‌منظور درنظر گرفتن عدم قطعیت از منطق فازی استفاده شده است؛ سپس به‌منظور کاربردی‌کردن مدل عوامل مختلفی همچون نرخ بازده بلندمدت، نرخ بازده کوتاه‌مدت، نقدشوندگی، حداقل و حداکثر نسبت سرمایه‌گذاری روی هر دارایی، تعداد دارایی‌های داخل پرتفوی، سود تقسیمی و وجود یا عدم وجود فروش استقراضی در مدل درنظر گرفته شده است. همچنین برای سازگاری مدل با انتظارات و اولویت‌های سرمایه‌گذار از توابع عضویت لاجستیک استفاده شده تا با تنظیم پارامترهای آن، بتوان پرتفوهای گوناگونی بر اساس اولویت هر سرمایه‌گذار بهینه کرد.

در بخش بعدی پیشینه پژوهش بررسی می‌شود؛ سپس در روش‌شناسی پژوهش، مفاهیمی از منطق فازی و چگونگی مدل‌سازی مسئله و ارائهٔ روش حل مناسب تشریح می‌شود. در مرحلهٔ بعد نیز به پیاده‌سازی مدل، بر اساس مثال عددی از بورس اوراق بهادار تهران بر اساس داده‌های واقعی پرداخته می‌شود و در نهایت، به جمع‌بندی مطالب و تحلیل نتایج و ارائه پیشنهادهایی جهت پژوهش‌های آتی پرداخته خواهد شد.

## پیشینهٔ پژوهش

مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری از جمله مهم‌ترین مسائل در دنیای مالی می‌باشد که اولین بار توسط (مارکوییتز[1]،

1. Markowitz

۱۹۵۲) ارائه شد. در واقع مارکوییتز فردی بود که برای اولین بار از انحراف معیار بازده دارایی‌ها به‌عنوان سنجه اندازه‌گیری ریسک استفاده کرد و یک مسئله بهینه‌سازی را برای حداقل‌سازی ریسک در سطح مشخصی از بازده طراحی کرد. اما در پژوهش‌های بعدی مشخص شد که این معیار، معیار مناسبی جهت اندازه‌گیری ریسک دارایی‌های مالی نیست؛ زیرا هرگونه انحراف، چه بالاتر و چه پایین‌تر از بازده انتظاری را به‌عنوان ریسک تلقی می‌کند و به‌دنبال کاهش آن است؛ در حالی که بازده بیشتر از میانگین برای سرمایه‌گذاران مطلوب است. بر این اساس و برای حل این مشکل، بعدها سنجهٔ دیگری با عنوان سنجهٔ نیم‌واریانس توسط مارکوییتز (۱۹۶۴) معرفی شد که امید ریاضی مجذور انحراف‌های منفی است؛ اما پس از آن، در تحقیقات دیگری که کونو و یامازاکی[1] (۱۹۹۱) انجام دادند، سنجهٔ ریسک جدیدی برای اندازه‌گیری ریسک معرفی کردند که از قدرمطلق انحراف از میانگین، به‌عنوان جایگزین انحراف معیار استفاده می‌کرد. بر این مبنا، استفاده از این سنجهٔ ریسک باعث می‌شود که مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری، به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل شود. سنجهٔ قدرمطلق انحراف از میانگین که از سنجه‌های اندازه‌گیری ریسک نامطلوب است، در سالیان بعد نیز به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفت. برای نمونه، مقدم، ابراهیمی و رحمانی[2] (۲۰۲۰) در پژوهش خود از این سنجه برای بهینه‌سازی استوار[3] سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای با درنظر گرفتن متغیرهای رفتاری استفاده کردند. همچنین، منگ و شان[4] (۲۰۲۱) نیز از سنجهٔ ریسک نیم قدرمطلق انحراف از میانگین، برای بهینه‌سازی مدل فازی سبد سرمایه‌گذاری با درنظر گرفتن هزینهٔ معاملاتی استفاده کردند.

اما فرض دیگری که در مدل‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری درنظر گرفته می‌شد، فرض وجود توزیع نرمال برای بازده دارایی‌هاست. بر این اساس، فرض نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌های مالی، در چند دههٔ اخیر مورد بحث بسیاری از محققان این حوزه بوده است. در ابتدا، برخی محققان همچون فاما[5] (۱۹۶۵) نشان دادند که بازده دارایی‌ها، قله‌ای بلندتر و دنباله‌ای پهن‌تر نسبت به توزیع نرمال دارد که نام توزیع دم پهن[6] را برای آن برگزیدند. همچنین فاما نشان داد که نقض فرض توزیع نرمال برای بازده دارایی‌ها در افق‌های زمانی کوتاه‌مدت بیشتر است. در دهه‌های بعد نیز محققان دیگری همچون مکنیل و فری[7] (۱۹۹۹) و آپاراسیو و استرادا[8] (۲۰۰۱) با استفاده از داده‌های مربوط به بازارهای مالی مختلف، انحراف‌های پیوسته و سیستماتیکی از حالت نرمال با مشخصه‌های قله بلندتر و دنباله پهن‌تر نشان دادند.

بدین ترتیب، نقض فرض نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها، استفاده از منطق فازی در مسئلهٔ بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری را توجیه کرد. منطق فازی اولین بار توسط پرفسور لطفی‌زاده[9] (۱۹۶۵)، از طریق تعریف تابع عضویت مفاهیم بیان شد. در نظریهٔ مجموعهٔ فازی، برخلاف نظریهٔ مجموعهٔ کلاسیک، هیچ مرز مشخصی بین عناصری که عضو

1. Konno & Yamazaki
2. Moghadam, Ebrahimi & Rahmani
3. Robust optimization
4. Meng & Shan
5. Fama
6. Fat tail
7. McNeil & Frey
8. Aparicio & Estrada
9. Zadeh

مجموعه هستند و عناصری که خارج از مجموعه‌اند، وجود ندارد. به عبارت بهتر، در منطق فازی، برخلاف منطق مجموعهٔ کلاسیک، وضعیت عضویت هر رویداد در داخل یک مجموعه صفر و یک نیست و هر رویداد فازی با یک عدد عضویتی به یک مجموعه تعلق خواهد داشت. سپس بر همین مبنا، اندازهٔ یک رویداد فازی توسط پرفسور لطفی زاده (۱۹۷۸) از طریق مفهوم اندازه امکان[1] معرفی شد. همچنین (بلمن و لطفی‌زاده[2]، ۱۹۷۰) نظریه تصمیم‌گیری فازی را مطرح کردند. آن‌ها فرایند تصمیم‌گیری در یک محیط فازی را توسط یک مجموعه تصمیم که از اهداف فازی و محدودیت‌های فازی تشکیل می‌شود، تعریف کردند. این تعریف بعدها به اصل بلمن ـ زاده معروف شد. نظریه‌های فازی، بعدها توسط لیو[3] (۲۰۰۴) با مطرح کردن نظریهٔ اعتبار فازی[4] و گسترش آن توسط خودش در سال ۲۰۰۷ توسعه پیدا کرد. همچنین، در یکی از آخرین توسعه‌های منطق فازی، نظریهٔ اعداد Z[5] توسط پرفسور (لطفی زاده، ۲۰۱۱) مطرح شد. بر این اساس، هر عدد Z براساس یک جفت عدد فازی بیان می‌شود که عامل اول محدودیت روی متغیر و عامل دوم میزان اعتبار عامل اول است که هر دو از طریق یک عدد فازی تشریح می‌شوند.

همان طور که عنوان شد، به‌دلیل محدودیت‌های موجود در توزیع‌های احتمالی بازده دارایی‌های مالی، منطق فازی در مدل‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفت. برای نمونه، لی، بایندر و هلوسکووا[6] (۲۰۰۱) با درنظر گرفتن بازده انتظاری و کواریانس بین دارایی‌ها به‌صورت اعداد بازه‌ای[7] که از مباحث منطق فازی است با استفاده از رویکرد مارکوییتز، به مدل‌سازی مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری اقدام کردند. همچنین پارا، ترول و اوریا[8] (۲۰۰۱) با استفاده از یک تابع سه هدفه شامل بازده، ریسک و نقدشوندگی از نظریه تصمیم‌گیری فازی با درنظر گرفتن هزینهٔ معاملاتی برای مدل‌سازی خود استفاده کردند. پس از آن، کارلسون، فولر و منجندر[9] (۲۰۰۲) با درنظر گرفتن بازده دارایی‌ها به‌صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای و به‌دست آوردن رابطه‌ای برای بازده و ریسک دارایی‌ها بر اساس نظریهٔ امکان فازی، از طریق شاخص ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار مدل خود را بهینه کردند. هانگ[10] (۲۰۱۰) در مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، از واریانس یک متغیر فازی تحت نظریه اعتبار به‌منظور اندازه‌گیری ریسک استفاده کرد. گوپتا، اینیگوچی، مهلوات و میتال[11] (۲۰۱۳) مدلی برمبنای استفاده از نظریهٔ تصمیم‌گیری فازی با درنظر گرفتن توابع عضویت برای ریسک و بازده تشکیل دادند. همچنین ژانگ، ژانگ و خو[12] (۲۰۱۱) مدل کارلسون را به‌صورت چند دوره‌ای با درنظر گرفتن هزینه معاملاتی اصلاح کردند. وانگ و واتادا[13] (۲۰۱۲) نیز در مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چندمعیاره، از نظریهٔ اعتبار

1. Possibility measure
2. Bellman & Zadeh
3. Liu
4. Credibility theory
5. Z-number theory
6. Lee, Binder & Hlouskova
7. Interval Numbers
8. Parra, Terol & Urıa
9. Carlsson, Fullér & Majlender
10. Huang
11. Gupta, Inuiguchi, Mehlawat & Mittal
12. Zhang, Zhang & Xu
13. Wang & Watada

فازی و سنجهٔ ارزش در معرض ریسک استفاده کردند. لی، لی، کین و چنگ[۱] (۲۰۱۳) با رویکرد مشابه، این بار به‌کمک نظریهٔ امکان مدل‌سازی خود را انجام دادند. علاوه‌براین، گوپتا، کومار، اینیگوچی و چاندرا[۲] (۲۰۱۴) از محدودیت نقدشوندگی در مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با رویکرد فازی بر اساس برنامه‌ریزی بازه‌ای استفاده کردند. پس از آن‌ها، جیرفتی و نجفی[۳] (۲۰۱۸) از اعداد Z برای درنظر گرفتن بازده دارایی‌ها بهره جستند و یک مدل سیمپلکس فازی تعمیم‌یافته برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری را توسعه دادند. چن و ژو[۴] (۲۰۱۹) از یک مدل فازی چندهدفه برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری بهره بردند. پیکانی، نوری، عشقی، خامه‌چیان و فرخی اصل[۵] (۲۰۲۱) یک مدل ریاضیات فازی چندهدفه برای بهینه‌سازی چند دوره‌ای سبد سرمایه‌گذاری در یک محیط غیرقطعی ارائه کردند. علاوه‌براین، گنگ، یو، مین و گی[۶] (۲۰۲۱) نیز از تئوری پشیمانی[۷] برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چندهدفه فازی با استفاده از تحلیلی پوششی داده‌ها[۸] استفاده کردند. همچنین ژانگ، لیو و یانگ[۹] (۲۰۲۲) از یک مدل فازی برای بهینه‌سازی چنددوره‌ای سبد سرمایه‌گذاری با درنظر گرفتن فروش استقراضی، به‌منظور توسعه یک سیستم معاملات خودکار سه مرحله‌ای استفاده کردند.

در پژوهش‌های داخلی انجام شده در این حوزه نیز، موسوی کاخکی و خطابی (۱۴۰۳) به بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با درنظر گرفتن ترجیحات رفتاری و حافظهٔ سرمایه‌گذار بر اساس الگوریتم فراابتکاری ژنتیک پرداختند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان‌دهنده آن است که حافظه سرمایه‌گذار در مقایسه با ترجیحات رفتاری، معیار مناسب‌تری برای بهینه‌سازی سبد سهام است. تقی‌زادگان، زمردیان، فلاح شمس و سعدی (۱۴۰۲) نیز به مقایسهٔ مدل بهینه‌سازی مارکوییتز و مدلی بر مبنای ارزش در معرض ریسک بر اساس ریسک عدم نقدشوندگی با استفاده از اطلاعات بورس اوراق بهادار تهران پرداختند. تیموری آشتیانی، حمیدیان و جعفری (۱۴۰۱) مدلی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری مبتنی بر استراتژی معاملاتی مومنتوم، معکوس و هیبرید ارائه کردند. پژوهش آن‌ها که از دو روش گرگ خاکستری و پنل پویا بهره گرفته بود، نشان داد که روش گرگ خاکستری، در مقایسه با روش پانل پویا، دقت بیشتری دارد و استراتژی‌های ترکیبی نسبت به استراتژی مومنتوم ساده، بازده اضافی بیشتری را در بازه بلندمدت نصیب سرمایه‌گذاران می‌کند. گل‌ارضی و انصاری (۱۴۰۱) نیز در پژوهش خود برای انتخاب پرتفوی بهینه، از مقایسهٔ دو الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه، شامل الگوریتم ژنتیک مرتب‌سازی نامغلوب و الگوریتم تکاملی قدرت پارتو بهبودیافته استفاده کردند که نتایج آن حاکی از برتری الگوریتم تکاملی قدرت پارتو دارد. با وجود انجام پژوهش‌های فراوان در حوزهٔ بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری، می‌توان ادعا کرد که در پژوهش‌های صورت گرفته تاکنون، به موضوع درنظر گرفتن سطوح مختلف

1. Li, Li, Qin & Cheng
2. Kumar, Inuiguchi & Chandra
3. Jirofti & Najafi
4. Chen & Xu
5. Peykani, Nouri, Eshghi, Khamechian & Farrokhi-Asl
6. Gong, Yu, Min & Ge
7. Regret theory
8. Data Envelopment Analysis (DEA)
9. Zhang, Liiu & Yang

انتظارات سرمایه‌گذار توجه چندانی نشده است. به عبارت بهتر پژوهش‌های صورت گرفته، عموماً به پیدا کردن یک پرتفوی بهینه برای تمامی سرمایه‌گذاران با انتظارات و اولویت‌های مختلف می‌پردازد؛ درحالی که این تفاوت در انتظارات می‌تواند بر ترکیب دارایی‌های پرتفوی بهینه اثرگذار باشد. از این رو، پژوهش حاضر سعی کرده است تا با به‌کارگیری مفاهیم فازی و استفاده از تابع عضویت لاجستیک‌شکل، از طریق استفاده از مدل کاربردی چندمعیاره، پرتفوی بهینه را با انتظارات مختلف سرمایه‌گذاران تطبیق دهد؛ به‌طوری که برای مثال، پرتفوی بهینه شده برای یک سرمایه‌گذار با رویکرد تهاجمی با پرتفوی سرمایه‌گذار با رویکرد محافظه‌کار متفاوت باشد و بتواند انتظارات هر یک را با توجه به ویژگی‌های آن‌ها برآورده کند.

## روش‌شناسی پژوهش

### مجموعه فازی

فرض کنید X یک مجموعه جهانی است که عنصر عمومی آن با x نشان داده می‌شود. یک مجموعه فازی A در X، مجموعه‌ای متشکل از زوج‌های مرتب $A = \{x , \mu_A(x) : x \in X\}$ است که $\mu_A(x)$ به‌عنوان تابع عضویت یا درجه عضویت $x \in X$ در بازه حقیقی $[۰,۱]$ تعریف می‌شود. مجموعه فازی $A$ در X، منحصراً به‌وسیله تابع عضویت $\mu_A(x)$ توصیف می‌شود، این تابع به هر عنصر X، یک عدد حقیقی متناهی و غیرمنفی در بازه $[۰,۱]$ اختصاص می‌دهد. مقدار $\mu_A(x)$ بیانگر «درجهٔ عضویت» $x$ در $A$ است که هر چه این مقدار به یک نزدیک‌تر باشد، درجهٔ «تعلق» $x$ به $A$ بیشتر است.

### تئوری تصمیم‌گیری فازی[1]

فرض کنید در یک مسئله تصمیم‌گیری، مجموعه‌های فازی روی مجموعه‌ای از گزینه‌های ممکن (X)، تعریف و هدف فازی G در X، توسط مجموعهٔ فازی G در X تعیین شده باشند. به همین شکل، می‌توان یک محدودیت فازی C نیز در X تعریف کرد. بر این اساس و با توجه به اهداف و محدودیت‌های فازی می‌توان چگونگی تصمیم‌گیری در یک محیط فازی را از طریق لحاظ کردن هم‌زمان اهداف و محدودیت‌ها تعریف کرد. باید توجه کرد که اهداف و محدودیت‌ها در محیط فازی رفتاری، کاملاً مشابه خواهند داشت. به‌صورت دقیق‌تر، اگر فضایی متشکل از متغیرهای تصمیم X داشته باشیم، آنگاه تصمیم فازی D به‌عنوان یک مجموعه فازی در X و به‌صورت $D = G \cap C$ تعریف می‌شود که در آن $\cap$ یک عملگر عطف است و معانی و جایگزین‌های مختلفی در موقعیت‌های تجربی دارد. حال می‌توان بر اساس توابع عضویت، تصمیم فازی را به‌شکل زیر فرموله کرد:

$$\mu_D(x) = min\,(\mu_G(x)\,, \mu_C(x)), \qquad \forall x \in X$$ رابطهٔ ۱)

1. Fuzzy decision theory

که در آن $\mu_G(x)$ و $\mu_C(x)$ به‌ترتیب توابع عضویت هدف و محدودیت فازی هستند. به‌طور کلی، اگر m هدف فازی $G_i(i = ۱,۲,\dots,m)$ و n محدودیت فازی $C_i(i = ۱,۲,\dots,n)$ وجود داشته باشد، تصمیم فازی به‌کمک مجموعه زیر تعریف می‌شود:

$$D = \left\{G_۱ \cap G_۲ \cap\dots\cap G_m\right\} \cap \left\{C_۱ \cap C_۲ \cap\dots\cap C_n\right\}$$ رابطهٔ ۲)

و تابع عضویت آن نیز به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$\mu_D(x) = min\ (\mu_{G_۱}(x)\ , \mu_{G_۲}(x), \dots, \mu_{G_m}(x), \mu_{C_۱}(x)\ , \mu_{C_۲}(x), \dots, \mu_{C_n}(x)), \forall x \in X$$ رابطهٔ ۳)

## اصل بلمن ــ زاده

بلمن و لطفی‌زاده پیشنهاد دادند که تصمیم ماکزیمم‌سازی $x^*$ بر اساس مجموعه غیر فازی زیر تعریف شود:

$$D^* = \{x^* \in X | x^* = arg\ max\{\mu_D(x)\} = arg\ max\{min(\mu_G(x), \mu_C(x))\}\}$$ رابطهٔ ۴)

به عبارت دیگر وقتی m هدف فازی وn محدودیت فازی وجود داشته باشد، تصمیم بهینه را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$D^* = \left\{x^* \in X | x^* = arg\ max\{\mu_D(x)\} = arg\ max\left\{min(\mu_{G_۱}(x), \mu_{G_۲}(x), \dots, \mu_{G_m}(x), \mu_{C_۱}(x), \mu_{C_۲}(x), \dots, \mu_{C_n}(x))\right\}\right\}$$ رابطهٔ ۵)

به عبارت دیگر، تصمیم ماکزیمم‌سازی $x^*$ می‌تواند به‌عنوان یک جایگزین با بالاترین (درجه) عضویت در تصمیم فازی D به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_D(x^*) = \cup\ \mu_D(x)$$ رابطهٔ ۶)

تصمیم ماکزیمم‌سازی $x^*$، بر اساس تعریف عملگرهای $\cup$ و $\cap$، ممکن است به‌عنوان یک تصمیم بهینه به‌صورت‌های مختلف تفسیر شود. به‌طور مثال، عملگر $\cap$ می‌تواند نشان‌دهندهٔ اشکال گوناگونی از عملگرهای عطف، مانند عملگر کمینه، مجموع وزنی اهداف و محدودیت‌ها، عملگر ضرب، عملگر میانگین، حاصل‌ضرب محدود و عملگر بیشینه هاماکر[1] باشد و عملگر $\cup$ نیز می‌تواند توسط جمع جبری، جمع محدود و عملگر بیشینه یاگر[2] جایگزین شود. از میان عملگرهای مذکور، عموماً عملگر max-min پیشنهاد شده در رویکرد بلمن ـ لطفی‌زاده، در عمل به کار گرفته می‌شود. انتخاب عملگرها مبتنی بر اولویت‌های تصمیم‌گیرنده و شرایط مسئله است.

1. Hamacher
2. Yager

## تابع لاجستیک[1]

همان طور که عنوان شد، برای بیان سطوح مطلوبیت سرمایه‌گذاران می‌بایست از یک تابع عضویت لاجستیک برای اعداد فازی استفاده کرد. تابع عضویت ($S$ شکل) لاجستیک‌شکلی شبیه به تابع هذلولی مماس[2] دارد؛ در حالی که استفاده از آن به‌مراتب راحت‌تر است. علاوه‌براین، تابع عضویت لاجستیک حتی زمانی که اپراتور ضرب، به‌جای اپراتور مینیمم مورد استفاده قرار گیرد، خطی بودن خود را حفظ می‌کند. همچنین، یک تابع عضویت ذوزنقه‌ای تقریبی از یک تابع لاجستیک است.

سرمایه‌گذار سطوح انتظارات خود را بر مبنای دانش و تجربه‌های قبلی خود تعیین می‌کند. بر این اساس، می‌توان از یک تابع عضویت S شکل غیرخطی برای بیان این سطوح انتظارات مبهم استفاده کرد. این تابع عضویت S شکل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

رابطهٔ ۷)
$$f(x) = \frac{1}{1 + exp(-\alpha x)}$$

که در آن $\alpha(۰ < \alpha < \infty)$ یک پارامتر فازی است که درجه ابهام را اندازه‌گیری می‌کند. شایان ذکر است تابع لاجستیک در نظر گرفته شده، یک تابع مناسب برای نمایش سطوح انتظارات مبهم سرمایه‌گذار در یک مسئله تصمیم‌گیری فازی است.

## نیم قدرمطلق انحراف معیار[3]

اسپرنزا[4] (۱۹۹۳) اولین بار سنجهٔ نیم قدرمطلق انحراف معیار را به‌عنوان جایگزینی برای اندازه‌گیری ریسک مالی پیشنهاد کرد. او در مقالهٔ خود نشان داد که اگر تابع ریسک، به‌صورت ترکیبی خطی از میانگین انحراف‌ها بیشتر و کمتر از بازده سبد سرمایه‌گذاری لحاظ شود و مجموع ضرایب این ترکیب خطی مثبت باشد، مدل جدیدی تحت عنوان مدل میانگین ـ قدر مطلق انحراف معیار به‌دست می‌آید. بر این اساس اگر بازده‌ها از توزیع نرمال پیروی کنند، این مدل با مدل مارکوییتز معادل خواهد بود. علاوه‌براین، اسپرنزا (۱۹۹۳) نشان داد که از طریق انتخاب مناسب ضرایب ترکیب خطی (به‌شکل یک برای انحراف‌های کمتر و صفر برای انحراف‌های بیشتر از میانگین)، می‌توان تعداد محدودیت‌ها را در مقایسه با مدل میانگین ـ قدر مطلق انحراف معیار به یک دوم کاهش داد.

نیم قدر مطلق انحراف معیار بازده سبد سرمایه‌گذاری، بر اساس بازده مورد انتظار بازه‌های زمانی گذشته را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

رابطهٔ ۸)
$$w_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left|\min\left\{0, \sum_{i=1}^{n}(r_{it} - r_i)x_i\right\}\right| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n}(r_{it} - r_i)x_i\right| + \sum_{i=1}^{n}(r_i - r_{it})x_i}{2}$$

1. Logistic Function
2. Tangent Hyperbolic Function
3. Semi-Absolute Deviation
4. Speranza

## معیارهای ارزیابی پرتفوی

**نسبت شارپ[1]:** یکی از معیارهای بسیار مهم در زمینه ارزیابی و بررسی پرتفوی سرمایه‌گذاری، نسبت شارپ نام دارد؛ نسبتی که به سرمایه‌گذاران کمک می‌کند تا بازده یک سرمایه‌گذاری نسبت به ریسک آن را بسنجند و اولین بار توسط بیل شارپ[2] معرفی شد. به عبارت بهتر، نسبت شارپ میانگین بازده به‌دست‌آمدهٔ مازاد بر نرخ سود بدون ریسک، به ازای هر واحد از نوسان‌پذیری یا ریسک کل را نشان می‌دهد. در نسبت شارپ از سنجهٔ انحراف معیار بازده دارایی‌ها به‌منظور اندازه‌گیری ریسک سرمایه‌گذاری استفاده می‌شود. بر این اساس نسبت شارپ را می‌توان از طریق رابطه زیر محاسبه کرد:

$$S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$ رابطهٔ ۹)

در رابطهٔ بالا، $R_f$ برابر نرخ بازده بدون ریسک، $R_p$ بازده پرتفوی و $\sigma_p$ برابر انحرف معیار بازده پرتفوی است.

در تحلیل نسبت شارپ، می‌توان گفت که به‌طور کلی، نسبت بالاتر از ۱ برای سرمایه‌گذار قابل قبول است؛ اما هر چقدر این نسبت بالاتر باشد، نشان‌دهندهٔ مطلوبیت بیشتر پرتفوی خواهد بود؛ زیرا مقدار بیشتر این شاخص، به معنای بازده مازاد بیشتر نسبت به بازده بدون ریسک به ازای یک واحد ریسک پرتفوی است.

**نسبت ترینر[3]:** نسبت ترینر که اولین بار توسط جک ال ترینر[4] مطرح شد، بازده مازاد بر نرخ بازده بدون ریسک را نسبت به ریسک سیستماتیک تعدیل می‌کند. در شاخص ترینر از ریسک سیستماتیک برای تفسیر نوسان‌های بازده استفاده می‌شود. بر خلاف نسبت شارپ که بازده مازاد را نسبت به ریسک غیرسیستماتیک اندازه‌گیری می‌کند، این معیار در واقع بیان‌کننده این موضوع است که در ازای یک واحد از ریسک سیستماتیک، چه میزان بازده تعدیل شده نصیب سرمایه‌گذار می‌شود. به‌منظور به‌دست آوردن ریسک سیستماتیک از مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای[5] استفاده می‌شود. بر این اساس برای محاسبه نسبت ترینر از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$T = \frac{R_p - R_f}{\beta_p}$$ رابطهٔ ۱۰)

در رابطه بالا $\beta_p$ بیانگر ریسک سیستماتیک پرتفوی بوده که از طریق میانگین موزون ضرایب بتای دارایی‌های پرتفوی حاصل می‌شود. ضریب بتا برای هر دارایی نیز از طریق مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای (CAPM) به‌دست می‌آید.

**آلفای جنسن:** آلفای جنسن نیز مانند نسبت ترینر با استفاده از CAPM محاسبه می‌شود. اسم معیار جنسن، برگرفته از اسم خالق آن مایکل سی جنسن[6] است و سود اضافی و بیش از حد انتظار ایجاد شده توسط پورتفوی را محاسبه می‌کند.

1. Sharpe ratio
2. Bill Sharpe
3. Treynor ratio
4. Jack L. Treynor
5. Capital Asset Pricing Model (CAPM)
6. Michael C. Jensen

در واقع این معیار حاصل تفاضل بین بازده مازاد محقق شده با بازده مورد انتظار از طریق مدل CAPM است و از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha_i = \left(R_p - R_f\right) - \beta_p(R_m - R_f)$$ رابطهٔ (۱۱)

در رابطه بالا $R_p$ برابر بازده پرتفوی، $\beta_p$ ضریب بتای پرتفوی، $R_m$ بازده بازار و $R_f$ نرخ بازده بدون ریسک است.

## مدل مفهومی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری

به‌منظور مدل‌سازی مسئله، ابتدا پارامترهای مربوط به پنج معیار بازده کوتاه‌مدت، بازده بلندمدت، نقدشوندگی، سود تقسیمی و ریسک را برای هر یک از دارایی‌ها محاسبه می‌کنیم. بدین منظور، برای بازده کوتاه‌مدت، میانگین عملکرد دارایی‌ها طی ۱۲ ماه گذشته و برای بازده بلندمدت، میانگین عملکرد دارایی‌ها طی ۳۶ ماه گذشته در نظر گرفته می‌شود. همچنین، در این مدل‌ها سود تقسیمی سالانه در نظر گرفته خواهد شد. برای یک بازده مورد انتظار داده شده، نیم قدر مطلق انحراف معیار «منفی» به‌عنوان جریمه درنظر گرفته شده و ریسک سبد سرمایه‌گذاری را اندازه‌گیری می‌کند. برای نقدشوندگی دارایی‌ها، فرض می‌کنیم که نرخ حجم معاملات که برای تعیین مقدار نقدشوندگی دارایی‌ها به کار می‌رود، دارای توزیع امکان ذوزنقه‌ای است. یک عدد ذوزنقه‌ای فازی که به شکل $\tilde{A} = (a, b, \alpha, \beta)$ نشان داده می‌شود با بازه تلرانس[1] $[a\ b]$، عرض چپ[2] $\alpha$ و عرض راست[3] $\beta$ دارای تابع عضویت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(t') = \begin{cases} \dfrac{t' - (a - \alpha)}{\alpha}, & a - \alpha \le t' \le a, \\ 1, & a \le t' \le b, \\ \dfrac{b' + \beta - t'}{\beta}, & b \le t' \le b + \beta, \\ 0, & \text{در غیر صورت این} \end{cases}$$ رابطهٔ (۱۲)

عدد فازی ذوزنقه‌ای $L_i = (L_{a_i}, L_{b_i}, L_{\alpha_i}, L_{\beta_i})$ را به‌عنوان نرخ حجم معاملات دارایی $i$ام قرار می‌دهیم. در نتیجه نرخ حجم معاملات سبد سرمایه‌گذاری از طریق رابطه $\sum_{i=1}^{n} \tilde{L_i} x_i$ به‌دست می‌آید. با استفاده از اصل توسعهٔ فازی، میانگین امکان[4] برای نرخ حجم معاملات فازی برای $i$امین دارایی به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$E\left(\tilde{L}_i\right) = \int_{.}^{1} \gamma \left(L_{a_i} - (1-\gamma)L_{\alpha_i} + L_{b_i} + (1-\gamma)L_{\beta_i}\right)d\gamma$$ رابطهٔ (۱۳)

$$= \frac{\mathrm{L_{a_i}} + \mathrm{L_{b_i}}}{2} + \frac{\mathrm{L_{\beta_i}} - \mathrm{L_{\alpha_i}}}{6}$$

1. Tolerance Interval
2. Left Width
3. Right Width
4. The Crisp Possibilistic Mean

در نتیجه مقدار میانگین امکان برای نقدشوندگی سبد سرمایه‌گذاری برابر است با:

رابطهٔ ۱۴)
$$E\left(\tilde{L}(x)\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{L}_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{L_{a_i} + L_{b_i}}{2} + \frac{L_{\beta_i} - L_{\alpha_i}}{6}\right) x_i$$

برای به‌دست‌آوردن پارامترهای عدد فازی ذوزنقه‌ای $L_i = (L_{a_i}, L_{b_i}, L_{\alpha_i}, L_{\beta_i})$ نیز سه فاکتور درنظر گرفته می‌شود: ۱. میانگین حسابی نقدشوندگی دارایی‌ها که می‌تواند به‌عنوان یک تقریب خوب برای محاسبه پارامترهای عدد ذوزنقه‌ای فازی استفاده شود؛ ۲. گرایش نقدشوندگی دارایی که نشان‌دهنده نقدشوندگی اخیر دارایی‌هاست. براین اساس اگر نقدشوندگی اخیر دارایی‌ها افزایشی باشد، می‌توان باور داشت که نقدشوندگی دارایی از میانگین حسابی آن بیشتر است و برعکس؛ ۳. استفاده از صورت‌های مالی و نظر خبرگان که می‌تواند نشانگر کاهش یا افزایش حجم معاملات در سال‌های آتی باشد.

در مرحله بعدی می‌توان فرض کرد که تمامی سرمایه‌گذاران بر حسب گرایش آن‌ها در میزان تحمل ریسک به دو گروه مجزا تقسیم می‌شوند: تهاجمی[1] (گرایش ضعیف به مخالفت با ریسک) و محافظه‌کار[2] (گرایش قوی به مخالفت با ریسک). براین اساس تابع عضویت S شکل غیر خطی برای بیان سطوح مبهم مطلوبیت سرمایه‌گذار نسبت به معیار چندگانه برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری به‌کار گرفته می‌شوند.

بر اساس موارد فوق مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چندهدفه به شکل زیر مدل‌سازی می‌شود:

رابطهٔ ۱۵)
$$\max f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i^{12} x_i$$

رابطهٔ ۱۶)
$$\max f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i^{36} x_i$$

رابطهٔ ۱۷)
$$\max f_3(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i\, x_i$$

رابطهٔ ۱۸)
$$\min f_4(x) = w(x) = \sum_{t=1}^{T} \frac{\left|\sum_{i=1}^{n}(r_{it} - r_i)\, x_i\right| + \sum_{i=1}^{n}(r_i - r_{it})\ x_i}{2T}$$

subject to

رابطهٔ ۱۹)
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{L_{a_i} + L_{b_i}}{2} + \frac{L_{\beta_i} - L_{a_i}}{6}\right) x_i \geq L$$

1. Aggressive
2. Conservative

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$ رابطهٔ ۲۰)

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = h$$ رابطهٔ ۲۱)

$$x_i \le u_i y_i, \qquad i = 1,2,\dots,n$$ رابطهٔ ۲۲)

$$x_i \ge l_i y_i, \qquad i = 1,2,\dots,n$$ رابطهٔ ۲۳)

$$x_i \ge 0, \qquad i = 1,2,\dots,n$$ رابطهٔ ۲۴)

$$y_i \in \{0,1\}, \qquad i = 1,2,\dots,n$$ رابطهٔ ۲۵)

در روابط بالا، $r_i$ نرخ بازده مورد انتظار دارایی $i$ام؛ $x_i$ نسبتی از سرمایه کل که به دارایی $i$ام تخصیص داده شده‌است؛ $y_i$ یک متغیر دودویی که نشان می‌دهد دارایی $i$ام در سبد سرمایه‌گذاری قرار دارد یا خیر.

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر دارایی } i \text{ام در سبد سرمایه‌گذاری باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$d_i$ سود تقسیمی سالانه برای دارایی $i$ام؛ $r_i^{12}$: میانگین عملکرد دارایی $i$ام طی یک دوره ۱۲ماهه؛ $r_i^{36}$ میانگین عملکرد دارایی $i$ام طی یک دوره ۳۶ ماهه؛ $r_{it}$ بازده تاریخی دارایی $i$ام طی t دوره قبلی؛ $u_i$ حداکثر نسبتی از سرمایه کل که می‌توان به دارایی $i$ام تخصیص داد؛ $l_i$ حداقل نسبتی از سرمایه کل که می‌توان به دارایی $i$ام تخصیص داد؛ L کمترین مطلوبیت سرمایه‌گذار از نقدشوندگی سبد سرمایه‌گذاری؛ $\widetilde{L_i}$ نرخ حجم معاملات فازی دارایی $i$ام؛ h تعداد دارایی‌هایی که در سبد سرمایه‌گذاری نگهداری می‌شود و T زمان کل.

همچنین توابع هدف $f_1$ و $f_2$ و $f_3$ و $f_4$ به‌ترتیب بیانگر بازده کوتاه‌مدت، بازده بلندمدت، سود تقسیمی و ریسک است که به‌شکل زیر محاسبه می‌شوند:

در تابع $f_1$ (رابطه ۱۵)، $r_i^{12} = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12} r_{it}$ با $i = ۱,۲,\dots,n$ است و $r_{it}$ از طریق داده‌های تاریخی تعیین می‌شود. در تابع $f_2$ (رابطه ۱۶)، $r_i^{36} = \frac{1}{36}\sum_{t=1}^{36} r_{it}$ با $i = ۱,۲,\dots,n$ است.

حذف تابع قدر مطلق از تابع $f_4$ (رابطه ۱۸) مسئله را به یک مسئله چندهدفه برنامه‌ریزی خطی و مختلط عدد صحیح تبدیل خواهد کرد. بدین منظور می‌توان رابطه ۱۸ را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\min f_4(p) = w(p) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t$$ رابطهٔ ۲۶)

*Subject to:* رابطهٔ ۲۷)

$$p_t + \sum_{i=1}^{n} (r_{it} - r_i)\ x_i \ge 0, \qquad t = 1,2,\dots,T,$$

رابطهٔ ۲۸) $p_t \geq 0, \qquad t = 1,2,\ldots,T$

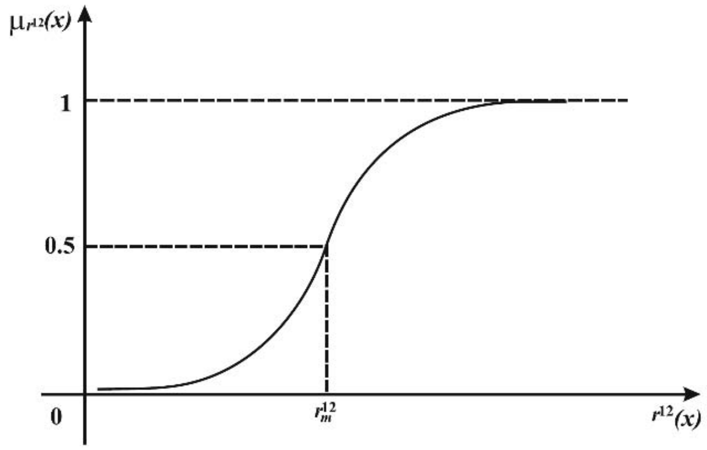
## روش حل مسئله

روش حل مسئله از طریق مراحل زیر است. در اینجا چهار تابع هدف (بازده کوتاه‌مدت، بازده بلندمدت، سود تقسیمی سالانه و ریسک) و محدودیت نقدشوندگی سبد سرمایه‌گذاری، مبهم و غیرقطعی در نظر گرفته می‌شوند. در ادامه به تعریف سطوح انتظارات مبهم سرمایه‌گذار می‌پردازیم.

تابع عضویت برای بازده مورد انتظار کوتاه‌مدت هدف توسط رابطه زیر بیان می‌شود:

رابطهٔ ۲۹)
$$\mu_{r_{12}}(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\alpha_{r_{12}}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^{12} x_i - r_m^{12}\right)\right)}$$

که در آن $r_m^{12}$ نقطه میانه (میانه سطح انتظارات از بازده مورد انتظار کوتاه‌مدت) است که مقدار تابع عضویت در آن برابر با ۰/۵ است و $\alpha_{r12}$ از طریق سرمایه‌گذار و با توجه به درجه رضایت او از این هدف تعیین می‌شود.

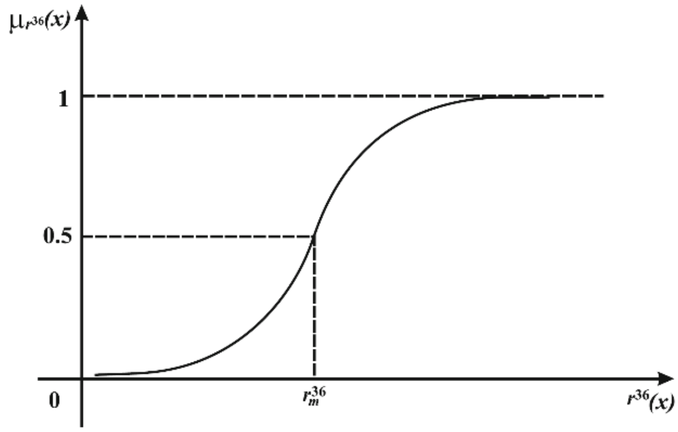



**شکل ۱. تابع عضویت برای بازده مورد انتظار کوتاه‌مدت هدف**

تابع عضویت برای بازده بلندمدت هدف با استفاده از رابطه زیر بیان می‌شود:

رابطهٔ ۳۰)
$$\mu_{r_{36}}(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\alpha_{r_{36}}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^{36} x_i - r_m^{36}\right)\right)}$$

که در آن $r_m^{36}$ نقطه میانه (میانه سطح انتظارات از بازده مورد انتظار بلندمدت) است که مقدار تابع عضویت در آن برابر با ۰/۵ است و $\alpha_{r36}$ از طریق سرمایه‌گذار و با توجه به درجه رضایت او از این هدف تعیین می‌شود.

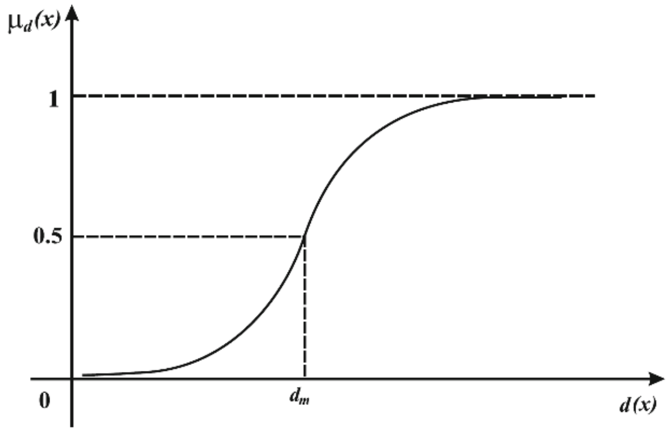



**شکل ۲. تابع عضویت برای بازده مورد انتظار بلندمدت هدف**

تابع عضویت برای سود تقسیمی سالانه هدف از طریق رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\mu_d(x) = \frac{1}{1+\exp\left(-\alpha_d\left(\sum_{i=1}^{n} d_i x_i - d_m\right)\right)}$$ رابطهٔ ۳۱)

که در آن $d_m$ نقطه میانه (میانه سطح انتظارات از سود تقسیمی سالانه) است که مقدار تابع عضویت در آن برابر بـا ۰/۵ است و $\alpha_d$ از طریق سرمایه‌گذار و با توجه به درجه رضایت او از این هدف تعیین می‌شود.

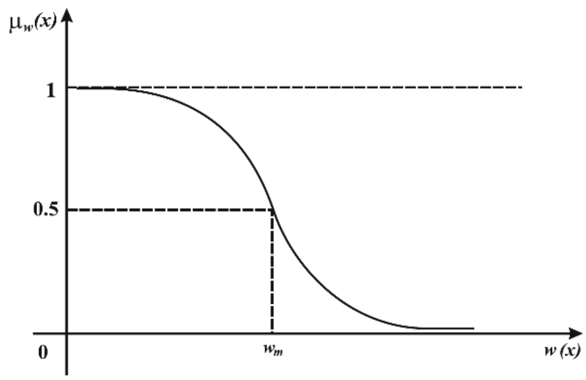



**شکل ۳. تابع عضویت برای سود سالانه هدف**

تابع عضویت برای ریسک هدف به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\mu_w(x) = \frac{1}{1+\exp\left(\alpha_w(w(x) - w_m)\right)}$$ رابطهٔ ۳۲)

که در آن $w_m$ نقطه میانه (میانه سطح انتظارات از ریسک سبد سرمایه‌گذاری) است که مقدار تـابع عضـویت در آن برابر با ۰/۵ است و $\alpha_w$ از طریق سرمایه‌گذار و با توجه به درجه رضایت او از این هدف تعیین می‌شود.

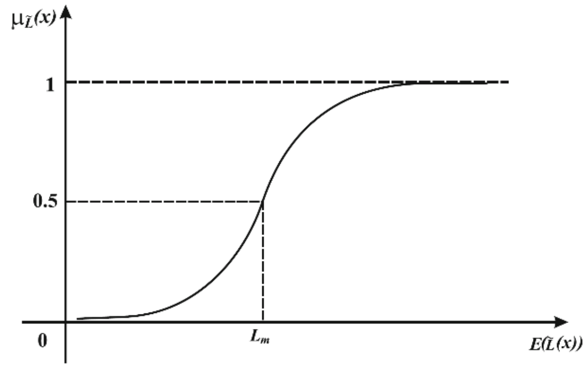



**شکل ٤. تابع عضویت برای ریسک هدف**

تابع عضویت برای نقدشوندگی سبد سرمایه‌گذاری از طریق رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\mu_{\tilde{L}}(x)=\frac{1}{1+\exp\left(-\alpha_L\left(E\left(\tilde{L}(x)\right)-L_m\right)\right)}$$ رابطهٔ ۳۳)

که در آن $L_m$ نقطه میانه (میانه سطح انتظارات از نقدشوندگی سبد سرمایه‌گذاری) است که مقدار تابع عضویت در آن برابر با ۰/۵ است و $\alpha_L$ از طریق سرمایه‌گذار و با توجه به درجه رضایت او تعیین می‌شود.




**شکل ٥. تابع عضویت برای محدودیت نقدشوندگی**

پارامترهای شکل $\alpha_{r12}$، $\alpha_{r36}$، $\alpha_d$، $\alpha_w$ و $\alpha_L$ تعیین‌کننده شکل توابع عضویت مربوط به خود هستند که در محدوده $(0\,,\infty)$ انتخاب می‌شوند. هرچقدر مقدار این پارامترها بزرگتر باشند، ابهام آن‌ها کمتر خواهد بود. همچنین نقاط میانه $r_m^{12}$، $r_m^{36}$، $d_m$، $w_m$ و $L_m$ به وسیله روابط $r_m^{12}=\frac{r_N^{12}+r_S^{12}}{2}$، $r_m^{36}=\frac{r_N^{36}+r_S^{36}}{2}$، $w_m=\frac{w_N+w_S}{2}$، $d_m=\frac{d_N+d_S}{2}$ و $L_m=\frac{L_N+L_S}{2}$ تعیین می‌شوند. در این روابط $r_N^{12}$ و $r_N^{36}$ و $w_N$ و $d_N$ و $L_N$ سطوح الزام[1] و $r_S^{12}$ و $r_S^{36}$ و $w_S$ و $d_S$ و $L_S$ سطوح کفایت[2] هستند که توسط سرمایه‌گذار تعیین می‌شوند. شایان ذکر است که توابع عضویت

1. Necessity Levels
2. Sufficiency Levels

خطی همانند توابع مثلثی و ذوزنقه‌ای یک سطح الزام و یک سطح کفایت به‌ترتیب برابر با صفر و یک دارند. از طرف دیگر یک سطح الزام و یا یک سطح کفایت می‌تواند توسط توابع عضویت S شکل تقریب زده شود.

حال با استفاده از اصل حداکثرسازی لطفی‌زاده و بلمن، مدل‌سازی مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چندهدفه فازی به‌صورت زیر است:

رابطهٔ ۳۴) $$\max \eta$$

رابطهٔ ۳۵) $$\begin{aligned}&Subject\ to\\ &\eta \le \mu_{r_{12}}(x),\end{aligned}$$

رابطهٔ ۳۶) $$\eta \le \mu_{r_{36}}(x),$$

رابطهٔ ۳۷) $$\eta \le \mu_{d}(x),$$

رابطهٔ ۳۸) $$\eta \le \mu_{w}(x),$$

رابطهٔ ۳۹) $$\eta \le \mu_{\tilde{L}}(x),$$

رابطهٔ ۴۰) $$0 \le \eta \le 1$$

و روابط ۲۰ تا ۲۵

مسئله فوق یک مسئله برنامه‌ریزی غیر خطی، عدد صحیح مختلط و حداکثرسازی است که ما آن را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، عدد صحیح مختلط و حداکثرسازی تبدیل می‌کنیم. بر این اساس می‌توان برخی محدودیت‌ها که دربرگیرنده توابع نمایی[1] هستند (روابط ۳۵ تا ۳۹) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

رابطهٔ ۴۱) $$\alpha_{r^{12}}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^{12} x_i - r_m^{12}\right) \ge \log\frac{\eta}{1-\eta}$$

رابطهٔ ۴۲) $$\alpha_{r^{36}}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^{36} x_i - r_m^{36}\right) \ge \log\frac{\eta}{1-\eta}$$

رابطهٔ ۴۳) $$\alpha_{d}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i x_i - d_m\right) \ge \log\frac{\eta}{1-\eta}$$

رابطهٔ ۴۴) $$-\alpha_{w}(w(x) - w_m) \ge \log\frac{\eta}{1-\eta}$$

1. Exponential Function

رابطهٔ ۴۵)
$$\alpha_L\left(E\left(\tilde{L}(x)\right)-L_m\right)\geq \log\frac{\eta}{1-\eta}$$

همچنین فرض کنید $\theta=\log\frac{\eta}{1-\eta}$ است، بنابراین داریم $\eta=\frac{1}{1+exp(-\theta)}$. در نتیجه ماکزیمم کردن $\eta$ معـادل بـا ماکزیمم کردن $\theta$ است. با توجه به این مطلب می‌توان مسئله را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی و عدد صـحیح مخـتلط هم‌ارز به شکل زیر تبدیل کرد:

رابطهٔ ۴۶)
$$max\ \theta$$

رابطهٔ ۴۷)
Subject to
$$\theta\leq\alpha_{r^{12}}\left(\sum_{i=1}^{n}r_i^{12}x_i-r_m^{12}\right),$$

رابطهٔ ۴۸)
$$\theta\leq\alpha_{r^{36}}\left(\sum_{i=1}^{n}r_i^{36}x_i-r_m^{36}\right)$$

رابطهٔ ۴۹)
$$\theta\leq\alpha_d\left(\sum_{i=1}^{n}d_ix_i-d_m\right)$$

رابطهٔ ۵۰)
$$\theta\leq\alpha_w\left(w_m-w(x)\right)$$

رابطهٔ ۵۱)
$$\theta\leq\alpha_L\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{L_{a_i}+L_{b_i}}{2}+\frac{L_{\beta_i}-L_{\alpha_i}}{6}\right)x_i-L_m\right)$$

و روابط ۲۰ تا ۲۵

## یافته‌های پژوهش

در این بخش به پیاده‌سازی مدل بر روی داده‌های بورس اوراق بهادار تهران خواهیم پرداخت. بدین منظور از شرکت‌های حاضر در شاخص ۵۰ شرکت فعال بورس اوراق بهادار بهره گرفته شده است. شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر را می‌توان معادل شاخص داو جونز در بورس نیویورک که مطرح‌ترین شاخص بورس آمریکاست در نظر گرفـت. ایـن شـاخص متشـکل از سبدی با سهام ۵۰ شرکت منتخب از صنایع گوناگون بورسی بوده که تا حدود زیادی می‌تواند رفتار شـاخص کـل بـورس اوراق بهادار را توضیح دهد. به عبارت بهتر، شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر بـورس اوراق بهـادار نوسـان‌هـای قیمـت سـهام شرکت‌هایی را نشان می‌دهد که درعمل بیش از ۷۰ درصد ارزش کل بازار بورس را به خود اختصـاص داده‌انـد. بنـابراین هرگونه تغییر در قیمت سهام این شرکت‌ها می‌تواند، تأثیر بسیار زیادی در تغییرات شاخص کل و همچنین میزان بازدهی دارایی سهام‌داران داشته باشد. بر این اساس شرکت‌های حاضر در شاخص ۵۰ شرکت فعـال بـورس در سـال ۱۴۰۲ کـه

پیش از سال ۹۹ عرضه عمومی شده و حد فاصل ابتدای سال ۹۹ تا انتهای سال ۱۴۰۱ دارای سـابقه معـاملاتی بـیش از ۶۰۰ روز هستند، استخراج شده‌اند. سپس اطلاعات دارایی‌ها در طول سه سال از ابتدای سال ۱۳۹۹ تا انتهای سال ۱۴۰۱ مورد بررسی قرار گرفته و بازده بلندمدت و کوتاه‌مدت دارایی‌ها به‌ترتیب بر اساس میانگین بازده ماهانه در سه سال و یک سال آخر محاسبه شده است. همچنین برای محاسبه پارامترهای نرخ نقد شوندگی دارایی‌ها به‌صورت عدد فازی ذوزنقه‌ای از نسبت حجم معاملات روزانه به کل سهام شناور در طول یک سال بهره گرفته شده است. پس از پیـاده‌سـازی مـدل از اطلاعات دارایی‌ها در نیمهٔ اول سال ۱۴۰۲ برای تست مدل و بررسی نتایج استفاده شده است. بر ایـن اسـاس اطلاعـات دارایی‌ها در جدول۱ خلاصه شده است:

**جدول ۱. داده‌های مورد استفاده در مثال عددی**

| نماد سهم | بازده کوتاه‌مدت ماهانه (درصد) | بازده بلندمدت ماهانه (درصد) | ریسک | میانگین امکان برای نرخ نقدشوندگی |
|---|---|---|---|---|
| اخابر | ۳/۴۴ | ۳/۰۱ | ۰/۰۷۴۸ | ۰/۰۰۳۹ |
| افق | ۵/۱۸ | ۳/۴۷ | ۰/۰۲۲۷ | ۰/۰۰۸۳ |
| بفجر | ۹/۱۶ | ۶/۶۳ | ۰/۰۴۰۵ | ۰/۰۰۳۷ |
| پارس | ۵/۲۷ | ۵/۳۴ | ۰/۰۴۵۷ | ۰/۰۰۳۵ |
| پارسان | ۴/۵۵ | ۷/۲۳ | ۰/۰۳۸۶ | ۰/۰۰۱۳ |
| پاکشو | −۰/۱۹ | ۲/۰۲ | ۰/۰۴۸۸ | ۰/۰۰۲۴ |
| تاپیکو | ۶/۲۹ | ۷/۳۴ | ۰/۰۴۵۶ | ۰/۰۰۴۶ |
| تاصیکو | ۷/۶۸ | ۶/۷۲ | ۰/۰۴۲۵ | ۰/۰۰۲۷ |
| تیپیکو | ۵/۹۸ | ۴/۱۸ | ۰/۰۴۶۲ | ۰/۰۰۱۵ |
| شاهد | ۴/۳۱ | ۶/۹۴ | ۰/۰۷۰۷ | ۰/۰۱۹۲ |
| جم پیلن | ۴/۴۷ | ۶/۲۶ | ۰/۰۴۴۸ | ۰/۰۰۵۳ |
| جم | ۳/۸۰ | ۵/۸۶ | ۰/۰۴۹۸ | ۰/۰۰۱۲ |
| حکشتی | ۸/۵۸ | ۵/۵۰ | ۰/۰۳۶۱ | ۰/۰۰۳۶ |
| خبهمن | ۱/۸۱ | ۹/۷۴ | ۰/۰۷۲۸ | ۰/۰۱۳۳ |
| خساپا | ۳/۶۷ | ۱۳/۳۴ | ۰/۰۶۹۵ | ۰/۰۱۵۸ |
| خگستر | ۶/۴۴ | ۱۰/۲۴ | ۰/۰۶۳۶ | ۰/۰۲۹۳ |
| خودرو | ۳/۸۷ | ۹/۵۹ | ۰/۰۶۱۴ | ۰/۰۰۸۵ |
| دعبید | ۸/۴۱ | ۴/۱۰ | ۰/۰۲۷۵ | ۰/۰۰۱۵ |
| رمپنا | ۴/۸۰ | ۴/۰۲ | ۰/۰۵۸۴ | ۰/۰۰۲۹ |
| شبریز | ۴/۴۷ | ۶/۱۱ | ۰/۰۶۹۲ | ۰/۰۰۲۱ |

| نماد سهم | بازده کوتاه‌مدت ماهانه (درصد) | بازده بلندمدت ماهانه (درصد) | ریسک | میانگین امکان برای نرخ نقدشوندگی |
|---|---|---|---|---|
| شبندر | ۵/۲۹ | ۸/۴۷ | ۰/۰۴۱۰ | ۰/۰۰۳۱ |
| شپدیس | ۲/۰۲ | ۶/۸۴ | ۰/۰۴۵۷ | ۰/۰۰۲۹ |
| شپنا | ۷/۷۶ | ۹/۴۲ | ۰/۰۳۸۳ | ۰/۰۰۲۸ |
| شتران | ۴/۱۰ | ۷/۱۰ | ۰/۰۴۸۵ | ۰/۰۰۲۳ |
| شیراز | ۴/۳۶ | ۶/۰۶ | ۰/۰۳۲۰ | ۰/۰۰۳۵ |
| شیران | ۵/۱۵ | ۴/۲۸ | ۰/۰۴۷۴ | ۰/۰۰۲۰ |
| فارس | ۵/۶۰ | ۶/۵۳ | ۰/۰۴۰۹ | ۰/۰۰۰۵ |
| فخوز | ۳/۰۳ | ۴/۸۷ | ۰/۰۶۵۲ | ۰/۰۰۲۴ |
| فملی | ۵/۸۱ | ۸/۱۵ | ۰/۰۴۸۴ | ۰/۰۰۰۶ |
| فولاد | ۵/۴۴ | ۷/۴۳ | ۰/۰۳۶۴ | ۰/۰۰۰۹ |
| فولاژ | ۸/۴۹ | ۷/۳۷ | ۰/۰۲۸۴ | ۰/۰۰۱۵ |
| کاوه | ۷/۹۳ | ۶/۰۸ | ۰/۰۲۷۶ | ۰/۰۰۳۴ |
| کچاد | ۱/۸۳ | ۶/۵۶ | ۰/۰۶۹۰ | ۰/۰۰۰۶ |
| کگل | -۱/۱۰ | ۵/۶۳ | ۰/۰۸۱۵ | ۰/۰۰۰۸ |
| مبین | ۵/۹۴ | ۵/۳۵ | ۰/۰۳۹۳ | ۰/۰۰۰۶ |
| نوری | ۴/۳۹ | ۷/۷۱ | ۰/۰۵۲۴ | ۰/۰۰۸۴ |
| همراه | ۱/۳۲ | ۲/۰۱ | ۰/۰۶۱۰ | ۰/۰۰۲۲ |
| وامید | ۱/۱۵ | ۴/۹۲ | ۰/۰۴۷۵ | ۰/۰۰۳۵ |
| وبصادر | ۱/۴۲ | ۵/۲۹ | ۰/۰۷۸۲ | ۰/۰۰۳۹ |
| وبملت | ۴/۷۱ | ۴/۱۶ | ۰/۰۵۲۰ | ۰/۰۰۴۸ |
| وپاسار | -۱/۵۳ | ۵/۶۸ | ۰/۰۹۰۹ | ۰/۰۰۰۹ |
| وتجارت | ۱/۷۷ | ۵/۸۴ | ۰/۰۷۸۸ | ۰/۰۰۴۶ |
| وصندوق | ۶/۲۴ | ۶/۶۸ | ۰/۰۳۶۵ | ۰/۰۰۱۹ |
| وغدیر | ۶/۷۶ | ۷/۳۳ | ۰/۰۳۲۸ | ۰/۰۰۱۷ |
| ومعادن | ۱/۹۹ | ۵/۴۰ | ۰/۰۶۱۵ | ۰/۰۰۲۲ |
| میانگین | ۴/۴۹ | ۶/۲۸ | ۰/۰۵۱۳ | ۰/۰۰۴۴ |
| میانه | ۴/۵۵ | ۶/۱۱ | ۰/۰۴۷۵ | ۰/۰۰۲۸ |

همان طور که در جدول ۱ نشان داده شده است، میانگین و میانه بازده کوتاه‌مدت و بلندمدت دارایی‌ها بسیار نزدیک به هم است. با بررسی اعداد جدول ۱ می‌توان نتیجه گرفت که بازده کوتاه‌مدت و بلندمدت دارایی‌های تشکیل‌دهندهٔ شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر دارای تابعی تقریباً ناریب هستند. با وجود این در خصوص توزیع ریسک و توزیع میانگین امکان نرخ نقدشوندگی این موضوع صدق نکرده و هر دو توزیع دارای چولگی مثبت (چوله به راست) هستند.

پارامترهای ورودی مدل در جدول ۲ به‌صورت خلاصه آورده شده‌است. فرض کنید از بین دارایی‌های جدول ۱ به‌دنبال تشکیل یک سبد سرمایه‌گذاری با ۸ دارایی هستیم؛ به‌طوری که هر دارایی کران بالا و پایین مشخصی برای نسبت سرمایه‌گذاری خود دارد. هدف ما حداکثر کردن درجهٔ رضایت سرمایه‌گذار از طریق حداکثرسازی بازده‌های کوتاه‌مدت و بلندمدت، نقدشوندگی سبد سرمایه‌گذاری و همچنین حداقل‌سازی میزان ریسک سبد سرمایه‌گذاری است.

**جدول۲. پارامترهای ورودی برای مثال عددی**

| | سرمایه‌گذار تهاجمی | سرمایه‌گذار محافظه‌کار |
|---|---|---|
| تعداد دارایی‌ها | ۴۵ | ۴۵ |
| تعداد ضابطه‌ها | ۴ | ۴ |
| تابع عضویت | غیرخطی $S$ شکل | غیرخطی $S$ شکل |
| شکل پارامترها | $\alpha_{r_{۱۲}} = ۶۰۰, \alpha_{r_{۳۶}} = ۶۰۰$ <br> $\alpha_{\omega} = ۸۰۰, \alpha_L = ۶۰۰$ | $\alpha_{r_{۱۲}} = ۴۰۰, \alpha_{r_{۳۶}} = ۴۰۰$ <br> $\alpha_{\omega} = ۱۲۰۰, \alpha_L = ۴۰۰$ |
| درجه رضایت | $r_m^{۱۲} = ۰/۰۴۵۵, r_m^{۳۶} = ۰/۰۶۲۸$ <br> $w_m = ۰/۰۵۱۳, L_m = ۰/۰۰۴۴$ | $r_m^{۱۲} = ۰/۰۴۴۹, r_m^{۳۶} = ۰/۰۶۱۱$ <br> $w_m = ۰/۰۴۷۵, L_m = ۰/۰۰۲۸$ |
| حداکثر و حداقل نسبت سرمایه‌گذاری | $u_i = ٪۵۵$ <br> $l_i = ٪۵$ | $u_i = ٪۴۰$ <br> $l_i = ٪۱۰$ |
| تعداد دارایی‌ها | ۸ | ۸ |

حال نتایج محاسبات را با توجه به استراتژی‌های تهاجمی و محافظه‌کارانه در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری ارائه می‌کنیم. سرمایه‌گذاری که از استراتژی تهاجمی استفاده می‌کند به‌دنبال کسب بازدهی بیشتر است، حتی اگر به ریسک بیشتری منجر شود. به همین شکل، سرمایه‌گذاری که از استراتژی محافظه‌کارانه استفاده می‌کند، به‌دنبال کاهش ریسک است، حتی اگر بازده و نقدشوندگی سبد سرمایه‌گذاری کاهش یابد. بر این اساس نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل برای استراتژی تهاجمی و محافظه‌کارانه به شرح جدول‌های زیر است:

**جدول ۳. نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل برای سرمایه‌گذار تهاجمی**

| نماد | افق | خگستر | دعبید | شپنا | شیراز | فولاژ | کاوه | وغدیر |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| نسبت سرمایه‌گذاری | ٪۲۶/۰۰ | ٪۴۳/۲۳ | ٪۵/۰۰ | ٪۵/۰۰ | ٪۵/۰۰ | ٪۵/۷۷ | ٪۵/۰۰ | ٪۵/۰۰ |

همچنین با پیاده‌سازی مدل برای سرمایه‌گذار محافظه‌کار به نتایج ذیل می‌رسیم:

**جدول ٤. نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل برای سرمایه‌گذار محافظه‌کار**

| نماد | افق | ثشاهد | حکشتی | خگستر | شیراز | فولاژ | کاوه | وغدیر |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| نسبت سرمایه‌گذاری | ٪۱۰/۰۰ | ٪۱۰/۰۰ | ٪۱۰/۰۰ | ٪۳۰/۰۰ | ٪۱۰/۰۰ | ٪۱۰/۰۰ | ٪۱۰/۰۰ | ٪۱۰/۰۰ |

همان گونه که مشاهده می‌شود مدل پژوهش برای سهام‌دار تهاجمی و محافظه کار در نسبت سرمایه‌گذاری و انتخاب برخی از دارایی‌ها متفاوت است. حال برای بررسی عملکرد پرتفوهای پیشنهادی می‌بایست از داده‌های مربوط به پنجره زمانی پس از سال ۱۴۰۱ استفاده کرد. بدین منظور داده‌های نیمه اول سال ۱۴۰۲ مورد بررسی قرار گرفته است و عملکرد پرتفوهای پیشنهادی در مقایسه با بازدهی شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر در جدول ۵ خلاصه شده است.

**جدول ۵. نتایج حاصل از تست مدل پیشنهادی**

| عنوان | شاخص کل بورس اوراق بهادار | شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر | پرتفوی سرمایه‌گذار تهاجمی | پرتفوی سرمایه‌گذار محافظه‌کار |
|---|---|---|---|---|
| بازدهی نیمه اول سال ۱۴۰۲ | ٪ ۸/۲۰ | ٪ ۶/۴۱ | ٪۱۶/۹۴ | ٪۱۴/۶۴ |

همان طور که مشاهده می‌شود هر دو پرتفوی پیشنهادی به‌شکل قابل ملاحظه‌ای بازدهی بیشتری از بازدهی شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر داشته‌اند. ضمن اینکه سرمایه‌گذار امکان تعیین حداقل نرخی از نقدشوندگی، حداکثر و حداقل نسبت سرمایه‌گذاری روی هر دارایی و همچنین تعداد دارایی‌های مشخصی در داخل پرتفوی خود را دارد. علاوه‌براین درصورتی که سرمایه‌گذار به‌دنبال دریافت سود نقدی باشد، می‌تواند این موضوع را نیز در مدل لحاظ کند. همچنین به‌منظور بررسی بهتر پرتفوی بهینه شده می‌توان از شاخص‌های ارزیابی پرتفوی استفاده کرد. نتایج مربوط به شاخص‌های ارزیابی پرتفوی در جدول ۶ خلاصه شده است.

**جدول ٦. نتایج مقایسه‌ای شاخص‌های ارزیابی پرتفوی برای مدل پژوهش**

| | نسبت شارپ | نسبت ترینر (درصد) | آلفای جنسن (درصد) |
|---|---|---|---|
| شاخص ۵۰ شرکت فعال بازار | ۱/۱۰ | ۳۳/۸۳ | ۰ |
| پرتفوی سرمایه‌گذار تهاجمی | ۳/۰۹ | ۶۴/۲۰ | ۲۶/۷۷ |
| پرتفوی سرمایه‌گذار محافظه‌کار | ۲/۷۵ | ۵۴/۸۹ | ۲۲/۲۲ |

همان طور که مشاهده می‌شود، معیارهای نسبت شارپ، نسبت ترینر و آلفای جنسن برای هر دو پرتفوی تهاجمی و محافظه‌کار نتایج مطلوبی را نشان می‌دهد. همچنین پرتفوی سرمایه‌گذار تهاجمی نسبت به پرتفوی سرمایه‌گذار محافظه‌کار در هر سه شاخص مقدار بیشتری را نشان می‌دهد.

## نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در پژوهش حاضر مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از منطق فازی مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور در مدل‌سازی مسئله تلاش شد تا علاوه‌بر درنظر گرفتن تمامی پارامترهای مهم برای سرمایه گذار، با استفاده از یک تابع عضویت لاجستیک S شکل، سطوح مختلف رضایت سرمایه‌گذار نیز لحاظ شود. بر این اساس نرخ بازده کوتاه‌مدت، نرخ بازده بلندمدت، ریسک، نقدشوندگی و سود تقسیمی با استفاده از توابع عضویت لاجستیک S شکل بر اساس میزان رضایت سرمایه‌گذار نسبت به هر یک از اهداف مذکور به‌عنوان توابع هدف تعیین شدند. همچنین تعداد دارایی‌های داخل پرتفوی، حداقل و حداکثر نسبت سرمایه‌گذاری روی هر دارایی و همچنین وجود یا عدم وجود فروش استقراضی به‌عنوان محدودیت به مدل اضافه شده شد. در مرحله بعدی به‌منظور تعیین روش حل مناسب برای مدل مذکور تلاش شد تا با استفاده از روش‌هایی همچون اصل بلمن ـ زاده و استفاده از توابع نمایی مدل مسئله را به یک مدل برنامه‌ریزی خطی و عدد صحیح تبدیل کرد تا با کمک نرم‌افزارهای بهینه‌سازی از جمله لینگو[1] و گمز[2] به‌راحتی قابل حل باشد. در مرحلۀ بعدی، مدل مذکور را با استفاده از داده های واقعی از بورس اوراق بهادار تهران پیاده‌سازی کردیم. بدین منظور از داده‌های ۵۰ شرکت فعال‌تر بازار سرمایه، از ابتدای سال ۱۳۹۹ تا انتهای سال ۱۴۰۱، به‌منظور مدل‌سازی مسئله و از داده‌های نیمۀ اول سال ۱۴۰۲، به‌منظور تست مدل بهره جستیم. همچنین پارامترهای مدل را بر اساس میزان ریسک‌پذیری سرمایه‌گذار برای دو نوع سرمایه‌گذار ریسک‌پذیر (تهاجمی) و سرمایه گذار محافظه‌کار تعیین کردیم. نتایج حاصل از تست مدل مذکور حاکی از آن بود که مدل برای هر دو نوع سرمایه‌گذار تهاجمی و محافظه‌کار بازده بالاتری نسبت به بازدهی شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر و بازدهی کل بورس اوراق بهادار در پی داشته است؛ به‌طوری که در دورۀ زمانی‌ای که بازدهی شاخص کل و شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر بورس اوراق بهادار به‌ترتیب برابر ۸/۲۰ و ۶/۴۱ درصد بوده است، بازدهی پرتفوی سرمایه‌گذار تهاجمی و سرمایه‌گذار محافظه‌کار به‌ترتیب برابر ۱۶/۹۴ و ۱۴/۶۴ درصد است. علاوه‌براین، بررسی شاخص‌های ارزیابی پرتفوی حاکی از آن است که هر دو پرتفوی سرمایه‌گذار تهاجمی و محافظه‌کار در هر سه شاخص نسبت شارپ، نسبت ترینر و آلفای جنسن اعداد بهتری را از شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر بورس اوراق بهادار تهران نشان می‌دهد. همچنین مقایسه دو پرتفوی سرمایه‌گذار تهاجمی و سرمایه‌گذار محافظه‌کار نیز حاکی از بهتر بودن هر سه شاخص مذکور برای پرتفوی سرمایه‌گذار تهاجمی است. بر این اساس، از آنجا که هر سرمایه‌گذار می‌تواند با توجه به اولویت‌های خود، مبنی بر اهمیت هر یک از اهداف مدل، پارامترهای مدل را تغییر دهد تا درجه رضایت او تأمین

1. Lingo
2. Gams

شود، به نظر می‌رسد که مدل مذکور تا حد زیادی بتواند با درنظر گرفتن اولویت‌های مختلف برای هر نـوع سـرمایه‌گـذار، بازده قابل قبولی را در مقابل ریسک متحمل شده سرمایه‌گذار به همراه داشته باشد.

با توجه به نتایج پژوهش می‌توان پیشنهادهای زیر را جهت پژوهش‌های آتی درنظر گرفت:

- سنجهٔ اندازه‌گیری ریسک در پژوهش فعلی سنجهٔ نیم قدرمطلق انحراف از میانگین است؛ درحـالی کـه مـی‌تـوان از سایر سنجه‌های نوین اندازه‌گیری ریسک همچون ارزش در معرض ریسک[1] و ارزش در معرض ریسک مشروط[2] که هر کدام دارای مزیت‌هایی است نیز، بهره گرفت.
- در پژوهش حاضر به‌منظور درنظر گرفتن سطوح متفاوت انتظارات سرمایه‌گـذار از توابـع عضـویت لاجسـتیک‌شـکل استفاده شده است. اما خوشه‌بندی[3] سرمایه‌گذاران با استفاده از ملاحظات تناسب[4]، می‌تواند موضوع بهینگی و تناسب را به‌صورت هم‌زمان در مسئلهٔ انتخاب سبد سرمایه‌گذاری لحاظ کند. ملاحظات تناسب به گونه‌شناسی سرمایه‌گـذار[5] پرداخته و می‌تواند شرایط مختلف سرمایه‌گذاران همچون سطح درآمد، نرخ پس‌انداز، سن و سایر عوامل تأثیرگذار در سطوح ریسک‌پذیری سرمایه‌گذار را به مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری وارد کند. این موضوع روش دیگـری بـرای درنظر گرفتن سطوح مختلف انتظارات سرمایه‌گذار است.
- استفاده از مدل‌های یادگیری ماشین[6] به‌منظور خوشه‌بندی سهام شرکت‌ها می‌تواند موجب ایجاد خوشه‌های مختلـف دارایی‌ها با سطوح مختلف ریسک شده که بر اساس درجه عضـویت سـرمایه‌گـذار در هـر خوشـه، سـطوح مختلـف انتظارات سرمایه‌گذار را ارضا می‌کند.

## منابع


تقی‌زادگان، غلام رضا؛ زمردیان، غلامرضا؛ فلاح شمس، میرفیض؛ سعدی، رسول (۱۴۰۲). مقایسه عملکرد مـدل‌هـای مـارکوییتز و مدل ارزش در معرض خطر براساس ریسک عدم نقدشوندگی ـ تی کاپولا با هم‌بسـتگی شـرطی پویـا ( DCC t-Cupola LVaR) جهت بهینه‌سازی پرتفوی در بورس اوراق بهادار تهران. *تحقیقات مالی*، ۲۵(۱)، ۱۵۲-۱۷۹.

تیموری آشتیانی، علی؛ حمیدیان، محسـن؛ جعفـری، سـیده محبوبـه (۱۴۰۱). ارائـه مـدل بهینـه بـرای انتخـاب سـهام مبتنـی بـر استراتژی‌های معاملاتی مومنتوم، معکوس و هیبریدی با استفاده از الگوریتم GWO. *تحقیقات مالی*، ۲۴(۴)، ۶۲۴-۶۵۴.

گل ارضی، غلامحسین؛ انصاری، حمیدرضـا (۱۴۰۱). مقایسـه عملکـرد الگـوریتم‌هـای تکـاملی NSGAII و SPEA2 در انتخـاب پرتفولیوی بهینه در بورس اوراق بهادار تهران. *تحقیقات مالی*، ۲۴(۳)، ۴۱۰-۴۳۰.

موسوی کاخکی، وحیده؛ خطابی، ساناز (۱۴۰۳). ارائـه الگـوی بهینـه‌سـازی سـبد سـهام بـر اسـاس ترجیحـات رفتـاری و حافظـه سرمایه‌گذار. *تحقیقات مالی*، ۲۶(۱)، ۱۳۱-۱۵۸.


1. Value at Risk (VaR)
2. Conditional Value at Risk (CVaR)
3. Clustering
4. Suitability
5. Investor typology
6. Machine learning models

## References

Aparicio, F. M. & Estrada, J. (2001). Empirical distributions of stock returns: European securities markets, 1990-95. *The European Journal of Finance*, *7*(1), 1-21.

Bellman, R. E. & Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management science*, *17*(4), B-141.

Carlsson, C., Fullér, R. & Majlender, P. (2002). A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. *Fuzzy sets and systems*, *131*(1), 13-21.

Chen, W. & Xu, W. (2019). A hybrid multiobjective bat algorithm for fuzzy portfolio optimization with real-world constraints. *International Journal of Fuzzy Systems*, *21*(1), 291-307.

Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, 38(1), 34-105.

Golarzi, G. & Ansari, H. R. (2022). Performance comparison of Non-dominated sorting genetic algorithm with strength Pareto evolutionary algorithm in selecting optimal portfolios in Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, *24*(3), 410-430. (*in Persian*)

Gong, X., Yu, C., Min, L. & Ge, Z. (2021). Regret theory-based fuzzy multi-objective portfolio selection model involving DEA cross-efficiency and higher moments. *Applied Soft Computing*, *100*, 106958.

Gupta, P., Inuiguchi, M., Mehlawat, M. K. & Mittal, G. (2013). Multiobjective credibilistic portfolio selection model with fuzzy chance-constraints. *Information Sciences*, *229*, 1-17.

Gupta, P., Kumar, M., Inuiguchi, M., Chandra, S. (2014). Fuzzy Portfolio Optimization (Advances in Hybrid Multi-criteria Methodologies). In *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer Berlin Heidelberg.

Huang, X. (2010). Portfolio Analysis: From Probabilistic to Credibilistic and Uncertain Approaches, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. DOI: 10.1007/978-3-642-11214-0_1

Jirofti, A. & Najafi, A. A. (2018). Portfolio selection using Z-number theory: two solution methodologies. *International Journal of Fuzzy Systems*, *20*(8), 2484-2496.

Konno, H. & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management science*, *37*(5), 519-531.

Lee, G. S., Binder, J. J. & Hlouskova, J. (2001). Legal Restrictions on Portfolio Holdings: Some Empirical Results. *Institute for Advanced Studies in Economics & Finance Working Paper*, (93).

Li, L., Li, J., Qin, Q. & Cheng, S. (2013, October). Credibilistic conditional value at risk under fuzzy environment. In *2013 Sixth International Conference on Advanced Computational Intelligence (ICACI)* (pp. 350-353). IEEE.

Liu, B. (2004). *Uncertainty Theory: An Introduction to its Axiomatic Foundations*, *STUDFUZZ*, Springer.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, *7*(1), 77-91.

Markowitz, H. M. (1991). Foundations of portfolio theory. *The journal of finance*, 46(2), 469-477.

McNeil, A.J., Frey, R., (1999). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Working paperRiskLab*, ETH Zurich.

Meng, X. & Shan, Y. (2021, July). A fuzzy mean semi-absolute deviation-semi-variance-proportional entropy portfolio selection model with transaction costs. In *2021 40th Chinese Control Conference (CCC)* (pp. 8673-8678). IEEE.

Moghadam, M. A., Ebrahimi, S. B. & Rahmani, D. (2020). A constrained multi-period robust portfolio model with behavioral factors and an interval semi-absolute deviation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *374*, 112742.

Mousavi Kakhki, V. & Khatabi, S. (2024). Modeling Portfolio Optimization based on behavioral Preferences and Investor’s Memory. *Financial Research Journal*, *26*(1), 131-158. (*in Persian*)

Nahmias, S. (1978) Fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems. 1*, 97–110.

Parra, M. A., Terol, A. B. & Urıa, M. R. (2001). A fuzzy goal programming approach to portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, *133*(2), 287-297.

Peykani, P., Nouri, M., Eshghi, F., Khamechian, M. & Farrokhi-Asl, H. (2021). A novel mathematical approach for fuzzy multi-period multi-objective portfolio optimization problem under uncertain environment and practical constraints. *Journal of fuzzy extension and applications*, *2*(3), 191-203.

Speranza, M. G. (1993). Linear programming models for portfolio optimization. *The Journal of Finance,* 14, 107–123.

Taghizadegan, G., Zomorodian, G., Fallahshams, M. & Saadi, R. (2023). Comparison of Markowitz Model and DCC-tCopula-LVaR for Portfolio Optimization in the Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, *25*(1), 152-179. (*in Persian*)

Teymouri Ashtiani, A., Hamidian, M. & Jafari, S. M. (2022). Providing the Optimal Model for Stock Selection Based on Momentum, Reverse and Hybrid Trading Strategies Using GWO Algorithm. *Financial Research Journal*, *24*(4), 624-654. (*in Persian*)

Wang, Y.L., Watada, J., (2012). A distance-Based PSO approach to solve fuzzy MOPSM with distinct risk measurement, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*. 9, 6191-6203.

Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information Control*, 8, 338-353.

Zadeh, L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—II. *Information sciences*, *8*(4), 301-357.

Zadeh, L.A. (1978*)* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1) 3–28.

Zadeh, L.A. (2011). A note on Z-numbers. *Information sciences*, *181*(14), 2923-2932.

Zhang, X., Zhang, W. G. & Xu, W. J. (2011). An optimization model of the portfolio adjusting problem with fuzzy return and a SMO algorithm. *Expert Systems with Applications*, *38*(4), 3069-3074.

Zhang, Y., Liu, W. & Yang, X. (2022). An automatic trading system for fuzzy portfolio optimization problem with sell orders. *Expert Systems with Applications*, *187*, 115822.