Financial Research Journal

Print ISSN: 1024-8153

Online ISSN: 2423-5377

Robust Portfolio Optimization under Interval-valued Conditional Value-at-Risk (CVaR) Criterion in the Tehran Stock Exchange

Alireza Hamidieh

Associate Prof., Department of Industrial Engineering, Payame Noor University, Tehran, Iran. E-mail: hamidieh@pnu.ac.ir

Meysam Kaviani*

*Corresponding Author, Associate Prof., Department of Management and Accounting, Karaj Branch, Islamic Azad University, Karaj, Iran. E-mail: meysam.kaviani@kiau.ac.ir

Bahareh Akhgari

MSc., Department of Industrial Engineering, Payame Noor University, Tehran, Iran. E-mail: akhgari_bahareh@yahoo.com

Abstract

Objective

Ever since Harry Markowitz's groundbreaking paper on the mean-variance model was published in 1952, numerous efforts have been dedicated to exploring the applications and advancements of classical models. Following the development of financial markets, active portfolio optimization has become one of the most important topics in finance. This study aimed to examine active portfolio management, a critical and delicate choice for investors, particularly concerning overall portfolio risk. The determination of an optimal stock portfolio that offers both a substantial return rate and controlled risk is consistently a subject of keen interest for analysts, investors, and even portfolio managers.

Methods

Many methods have been developed to measure investment risk, and the price of risky assets changes rapidly and randomly due to the complexity of the financial market. A random interval is a suitable tool for describing uncertainty with randomness and imprecision. Given the uncertainty in financial markets, this study used stochastic intervals to describe the returns of risky assets and the tail sequence risk, called the interval-valued conditional value at risk (ICVaR). The interval value in this model is an extension of the classic portfolio model, which can comprehensively reflect the complexity of the financial market and the risk-taking behavior of investors.

Results
Following the findings from the real data of 10 out of 30 large corporates listed on the Tehran Stock Exchange, the ICVaR model is interpretable and compatible with the practical scenario and can be used to choose the optimal portfolio at different levels of risk and depending on the risk-taking degree of the investor. The present study used the portfolio optimization approach under a new criterion of ICVaR through the closing price, the highest price, and the lowest price on each trading day. In this model, the return range of the risky asset is taken as a random variable with an interval value. Besides, CVaR with an interval value is used to describe the risk instead of the variance at a certain level of return.

Conclusion
Uncertainties induced by asset transactions affect the predictions of investment plans. To address such challenging uncertainties in this study, a stable stochastic optimization approach was presented based on the range of optimal solutions produced by the proposed model to determine different operational options. Finally, the model developed in this study showed that investors' subjective risk preference or aversion can be described by observing the principle of portfolio diversification, which reflects an innovation different from the classic portfolio model. Furthermore, the worst possible case was optimized in all scenarios in the model by robust optimization. The findings indicated that a narrower range corresponds to a higher level of risk aversion among investors.

Keywords: Portfolio, Random variable, Interval value, CVaR, Robust planning.

Citation: Hamidieh, Alireza; Kaviani, Meysam & Akhgari, Bahareh (2023). Robust Portfolio Optimization under Interval-valued Conditional Value-at-Risk (CVaR) Criterion in the Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, 25(3), 508-528. https://doi.org/10.22059/FRJ.2023.351106.1007412 (*in Persian*)

Financial Research Journal, 2023, Vol. 25, No.3, pp. 508-528
Published by University of Tehran, Faculty of Management
https://doi.org/10.22059/FRJ.2023.351106.1007412
Article Type: Research Paper

Received: November 12, 2022
Received in revised form: June 10, 2023
Accepted: June 24, 2023
Published online: October 17, 2023

شاپا چـاپـی: ۸۱۵۳-۱۰۲۴
شاپا الکترونیکی: ۵۳۷۷-۲۴۲۳

تحقیقات مالی

بهینه‌سازی استوار پرتفوی تحت معیار ارزش در معرض ریسک شرطی ـ فاصله‌ای (ICVaR) در بورس تهران

علیرضا حمیدیه

استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: hamidieh@pnu.ac.ir

میثم کاویانی*

* نویسنده مسئول، استادیار، گروه مدیریت و حسابداری، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران. رایانامه: meysam.kaviani@kiau.ac.ir

بهاره اخگری

کارشناس ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: akhgari_bahareh@yahoo.com

چکیده

هدف: زمانی که هِری مارکوویتز مقاله پیشگام مدل میانگین ـ واریانس را در سال ۱۹۵۲ منتشر کرد، آثار زیادی در باب کاربردها و توسعه مدل‌های کلاسیک وجود داشت و با توجه به پیشرفت بازارهای مالی، بهینه‌سازی فعال پرتفوی به یکی از مباحث مهم مالی تبدیل شد. هدف اصلی این پژوهش بررسی و تحلیل مدیریت فعال پرتفوی، به‌عنوان تصمیم‌گیری مهم و حساس برای سرمایه‌گذاران، هم‌زمان با توجه به ریسک کل پرتفوی است؛ زیرا عوامل مؤثر بر انتخاب پرتفوی بهینه سهام با نرخ بازده بالا و ریسک کنترل‌شده، از موضوعاتی است که همواره در کانون توجه تمامی تحلیلگران و سرمایه‌گذاران و حتی مدیران پرتفوی قرار دارد.

روش: تاکنون روش‌های زیادی برای سنجش ریسک سرمایه‌گذاری مطرح شده است؛ اما قیمت دارایی‌های ریسکی، به‌دلیل پیچیدگی بازار مالی، به‌سرعت و به‌طور تصادفی تغییر می‌کند و فاصله تصادفی، ابزار مناسبی برای توصیف عدم قطعیت تصادفی و عدم دقت است. با توجه به عدم قطعیت در بازارهای مالی، این پژوهش از فواصل تصادفی برای توصیف بازده دارایی ریسکی استفاده کرده است و ریسک دنباله در نظر گرفته‌شده، ارزش در معرض ریسک شرطی ـ فاصله‌ای (ICVaR) نامگذاری شده است. ارزش فاصله‌ای در این مدل، بسط مدل پرتفوی کلاسیک است که می‌تواند به‌طور جامع، پیچیدگی بازار مالی و ریسک‌پذیری سرمایه‌گذاران را منعکس کند.

یافته‌ها: با استناد بر نتایج به‌دست‌آمده از داده‌های واقعی ۱۰ شرکت، از بین ۳۰ شرکت بزرگ موجود در بازار بورس تهران، مدل ICVaR قابل تفسیر و سازگار با سناریوی عملی است و می‌تواند در سطوح مختلفی از ریسک و بسته به درجه ریسک‌پذیری سرمایه‌گذار، در انتخاب پرتفوی بهینه مناسب باشد. این پژوهش از رویکرد بهینه‌سازی پرتفوی تحت معیار جدید ارزش در معرض ریسک شرطی ـ فاصله‌ای، از طریق قیمت پایانی، بالاترین قیمت و پایین‌ترین قیمت در هر روز معاملاتی استفاده کرده است. در این مدل، دامنه بازده دارایی پُرریسک به‌عنوان یک متغیر تصادفی با ارزش فاصله‌ای به‌دست آمده است. همچنین برای توصیف ریسک، از CVaR با مقدار فاصله‌ای، به‌جای واریانس در یک سطح معینی از بازده استفاده شده است.

نتیجه‌گیری: عدم قطعیت ناشی از معاملات دارایی، در پیش‌بینی‌های طرح‌های سرمایه‌گذاری تأثیر می‌گذارد. در این مطالعه، برای مواجهه با این‌گونه عدم قطعیت‌های چالش‌برانگیز، رویکرد بهینه‌سازی تصادفی استوار ارائه شد و محدوده راه‌حل‌های بهینه تولید شده مدل پیشنهادی، برای تعیین گزینه‌های مختلف عملیاتی بود. در نهایت، مدل ارائه‌شده در این پژوهش نشان داد که می‌توان ترجیح ذهنی یا تنفر سرمایه‌گذاران از ریسک را با رعایت اصل تنوع‌بخشی در پرتفوی توصیف کرد که به‌نوعی نوآوری متفاوتی از مدل کلاسیک پرتفوی را

ارائه می‌دهد. همچنین با بهینه‌سازی استوار، تمام سناریوها با بدترین حالت ممکن در مدل بهینه شد و نتایج نشان داد که هر چه این دامنه کوچک‌تر در نظر گرفته شود، شدت ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاران بیشتر نمایان می‌شود.

کلیدواژه‌ها: پرتفوی، متغیر تصادفی، ارزش فاصله‌ای، ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR)، برنامه‌ریزی استوار.

استناد: حمیدیه، علیرضا؛ کاویانی، میثم و اخگری، بهاره (۱۴۰۲). بهینه‌سازی استوار پرتفوی تحت معیار ارزش در معرض ریسک شرطی ـ فاصله‌ای (ICVaR) در بورس تهران. *تحقیقات مالی*، ۲۵(۳)، ۵۰۸– ۵۲۸.

تحقیقات مالی، ۱۴۰۲، دوره ۲۵، شماره ۳، صص. ۵۰۸– ۵۲۸
ناشر: دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
نوع مقاله: علمی پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۲۱
تاریخ ویرایش: ۱۴۰۲/۰۳/۲۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۴/۰۳
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۷/۲۵
doi: https://doi.org/10.22059/FRJ.2023.351106.1007412

مقدمه

پرتفوی مجموعه‌ای از سرمایه‌گذاری‌ها است که توسط مؤسسه‌ها یا یک فرد در دسترس قرار می‌گیرد و بازده آن بااهمیت‌ترین اطلاعات سرمایه‌گذار محسوب می‌شود (مارتی، ۱۴۰۱). انتخاب پرتفوی بهینه نیازمند تصمیم‌گیری‌های محافظه‌کارانه در مورد ترکیبات پرتفوی است (مارتی، ۱۳۹۷) و همچنین یکی از دغدغه‌های بسیار مهم سرمایه‌گذاران محسوب می‌شود (راعی، نمکی و احمدی، ۱۴۰۱). از طرفی زمانی که هِری مارکوویتز[1] مقاله پیشگام مدل میانگین ـ واریانس را در سال ۱۹۵۲ منتشر کرد، آثار زیادی در مورد کاربردها و توسعه مدل‌های کلاسیک وجود داشته است (ژانگ و ژانگ[2]، ۲۰۲۲). منطق مورد استفاده در مدل مارکوویتز، آن است که واریانس یک معیار پراکندگی از ریسک است که می‌تواند ریسک پرتفوی را مورد سنجش قرار دهد (شیری قهی، دیده‌خانی، خلیلی و سعیدی، ۱۳۹۷). مهم‌ترین دستاورد مدل مارکوویتز، معرفی واریانس به‌عنوان شاخص ریسک بود؛ اما پژوهش‌های بعدی به کاستی‌های آن اشاره کردند (راعی، باسخا و مهدی‌خواه، ۱۳۹۹)، از این رو علاوه بر واریانس، روش‌های زیادی برای سنجش ریسک دارایی‌ها مطرح شد. برای مثال، کونو و یامازاکی[3] (۱۹۹۱) مسئله پرتفوی بهینه را بر اساس میانگین قدر مطلق انحرافات یا نیم‌واریانس مطالعه کردند که محاسبه آن در قیاس با واریانس پرتفوی آسان است. بنابراین آنچه در تئوری‌های مالی مرتبط با ریسک اهمیت دارد، ریسک‌های نامطلوب و سنجش آن است. معیار ارزش در معرض ریسک (VaR)[4] و شاخص‌های مشتق شده از آن، ابزاری برای سنجش این گونه ریسک‌هاست (احمدی، لطفی و رجبی، ۱۳۹۹). محاسبه ارزش در معرض ریسک ساده و آسان است، اما برای حل مسئله بهینه بسیار مهم هیچ ویژگی ریاضی خوب مانند تحدب[5] و زیرجمع‌پذیری[6] را ندارد (ژانگ و ژانگ، ۲۰۲۲). ویژگی تحدب بیان می‌کند که ریسک پرتفوی نمی‌تواند بزرگتر از مجموع ریسک‌های اجزاء آن باشد و زیرجمع‌پذیری تضمین می‌کند VaR همیشه نمی‌تواند تنوع‌سازی را مورد بررسی قرار دهد. مواردی وجود دارد که در آن VaR پرتفوی نسبت به مجموع VaRهای مربوط به اجزای پرتفوی بزرگتر می‌باشد. این امر نشان می‌دهد که VaR نمی‌تواند برای سنجش واقعی ریسک به کار گرفته شود (راشف و فابوتسی، ۱۳۹۷). برای غلبه بر این مشکل، می‌توان ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) را در نظر گرفت که یک معیار ریسک منسجم با ویژگی‌های ریاضی خوب است. به‌دلیل عدم تقارن اطلاعاتی و ناقص بودن بازارها، قیمت دارایی‌های ریسکی شکل پیچیده‌تری نسبت به یک متغیر عددی[7] را نشان می‌دهد. برای توصیف پیچیدگی، تصادفی و نادرست بودن بازار مالی، ابزار متغیرهای فاصله‌ای انتخاب خوبی است، برای مثال، می‌توان مقادیر فاصله‌ای بازده[8]، VaR و CVaR با ارزش فاصله‌ای را در نظر گرفت. بر اساس مقادیر فاصله‌ای بازده، انتخاب پرتفوی در این پژوهش با ارزش فاصله‌ای مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ICVaR یک

---

1. Markowitz
2. Zhang and Zhang
3. Konno and Yamazaki
4. Value at Risk
5. Convexity
6. Sub-Additivity
7. Scalar Variable
8. Interval-Valued Return

معیار ریسک است و جمع‌پذیری را برآورده می‌کند. این معیار، به‌عنوان روشی مشابه مدل کلاسیک پرتفوی مارکوویتز، مدل‌های انتخاب پرتفوی با ارزش فاصله‌ای بهینه ساخته می‌شوند (ژانگ و ژانگ، ۲۰۲۲). آیدا[۱] (۲۰۰۳) انتخاب پرتفوی را با ضرایب فاصله‌ای مطالعه کرد. همچنین آیدا (۲۰۰۴) مسئله پرتفوی را با ضرایب فاصله‌ای و فازی را در نظر گرفت. گیو، فانری و ناردلی[۲] (۲۰۰۶) مدل پرتفویی فاصله‌ای را بر اساس تابع پشیمانی[۳] مورد مطالعه قرار داد و ژانگ و لی[۴] (۲۰۰۹) مدل‌های انتخاب پرتفوی را بر اساس نیم‌واریانس با ارزش فاصله‌ای در نظر گرفتند.

از طرفی با توجه به اینکه بازده و ارزیابی ریسک پرتفوی به قابلیت اطمینان و صحت تابع توزیع بازده تصادفی یک دارایی بستگی دارد (ژانگ، لی، میتوما و اکازاکی[۴]، ۲۰۰۹)، بنابراین در بهینه‌سازی پرتفوی، عدم‌قطعیت پارامتریک معمولاً به دو شکل مدل‌سازی می‌شود؛ یکی بر اساس بازده تحقق‌یافته دارایی‌ها و دیگری بر پایه توزیع احتمال اساسی و به‌دنبال آن بر بازده تمرکز دارد. در این حالت تکنیک‌های بهینه‌سازی استوار، به‌طور گسترده برای ایجاد پرتفوی بهینه در برابر چنین اشکالی از عدم‌قطعیت پارامتری توسعه یافته‌اند. عدم‌قطعیت در پارامترهای ورودی، برای اولین بار توسط سویستر[۵] (۱۹۷۳) مطرح شد که یک مدل برنامه‌ریزی خطی استوار با راه حل بدبینانه و بسیار محافظه‌کارانه بود. بن تال و نمیروفسکی[۶] (۲۰۰۰) نیز به این نگرانی پرداختند و یک مجموعه عدم‌قطعیت بیضوی برای پارامترهای نامشخص را توسعه دادند. با این حال، مدل آن‌ها یک مدل بهینه‌سازی غیرخطی بود. برای غلبه بر محدودیت‌های مدل‌های استوار برتسیماس و سیم[۷] (۲۰۰۴) یک مدل بهینه‌سازی استوار با مزیت خطی بودن مدل و امکان تنظیم درجه محافظه‌کاری ایجاد کردند. همچنین مالوی و وندربی[۸] (۱۹۹۵) مفاهیم استواری مدل و استواری راه‌حل را ارائه کردند که ماهیت گسسته و سناریویی داده‌ها را پوشش می‌داد. آن‌ها مدل بهینگی استوار را با تحلیل هزینه فایده بین استواری راه‌حل و استواری مدل پیشنهاد دادند. در ادامه نیز لو[۹] (۲۰۱۱) مدل بهینه‌سازی پرتفوی با تمرکز استواری در میانگین واریانس بدبینانه‌ترین حالت را با عدم‌قطعیت در میانگین و کوواریانس بازده دارایی مورد مطالعه قرار داد و همچنین مون و یائو[۱۰] (۲۰۱۱) استواری را در مدل انحراف مطلق میانگین تحت چارچوب برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) معرفی کردند. سپس فرتیس و همکاران[۱۱] (۲۰۱۲)، کارا و کمال اغلو[۱۲] (۲۰۱۷) و یو، چوی، لی و چوانگ[۱۳] (۲۰۱۹) بدترین ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) تحت مجموعه عدم‌قطعیت مختلط و زیملر، راستم و کوهن[۱۴] (۲۰۱۴) و شارما، آتس و مهرا[۱۵]

1. Ida
2. Giov, Funari and Nardelli
3. Regret Function
4. Zhang, Li, Mitoma & Okazaki
5. Soyster
6. Ben-Tal and Nemirovski
7. Bertsimas and Sym
8. Mulvey and Vanderbei
9. Lu
10. Moon and Yao
11. Fertis et al
12. Kara & Kemaloglu
13. Yu, Chiou, Lee & Chuang
14. Zymler, Rustem & Kuhn
15. Sharma, Utz & Mehra

(۲۰۱۷) بدترین حالت نسبت امگا و نسبت امگا–CVaR را تحت مجموعه‌های عدم‌قطعیت مختلط، جعبه و بیضی را مورد بررسی قرار دادند.

با توجه موارد فوق، پیش از این پژوهش‌های زیادی برای توسعه مدل‌های مختلف تحلیل ریسک در بهینه‌سازی پرتفوی انجام شده است. در کشورمان نیز از مدل‌های VaR و CVaR به دفعات استفاده شده که هیچ از آن‌ها به ارزش فاصله‌ای نپرداخته است؛ برای مثال، پژوهش‌های طالب‌لو و داودی (۱۳۹۷)، شیری و همکاران (۱۳۹۷)، احمدی و همکاران (۱۳۹۹)، سینا و فلاح شمس (۱۳۹۹)، راعی و همکاران (۱۳۹۹)، حدادی، نادمی و طافی (۱۴۰۰)، راعی و همکاران (۱۴۰۱) و تقی‌زادگان، زمردیان، فلاح شمس و سعدی (۱۴۰۲). از این رو، در مقالات گوناگون و از زوایای مختلفی از این روش‌ها استفاده شده است. هدف این پژوهش رویکرد بهینه‌سازی پرتفوی، تحت معیار جدید ارزش در معرض ریسک شرطی ـ فاصله‌ای[1]، از طریق قیمت پایانی[2]، بالاترین قیمت[3] و پایین‌ترین قیمت[4] در هر روز معاملاتی است. در این مدل دامنه بازده دارایی پُرریسک را می‌توان به‌عنوان یک متغیر تصادفی با ارزش فاصله‌ای به‌دست آورد و همچنین، برای توصیف ریسک، از CVaR با مقدار فاصله‌ای به‌جای واریانس برای یک سطح معینی از بازده استفاده شده است. ارزش فاصله‌ای در این مدل ICVaR بسط مدل پرتفوی کلاسیک است که می‌تواند به‌طور جامع پیچیدگی بازار مالی و ریسک‌پذیری سرمایه‌گذاران را منعکس کند.

پیشینه تجربی پژوهش

در سال‌های اخیر پژوهشگران زیادی تلاش نمودند تا معیارهای مناسب سنجش ریسک در بهینه‌سازی پرتفوی را ارائه کنند؛ اما سؤال بحث‌برانگیز در بین متخصصان این است که کدام معیار مناسب است. در این بخش به برخی از پژوهش‌های داخلی و خارجی می‌پردازیم که در خصوص بهینه‌سازی پرتفوی تحت معیار VaR و CVaR انجام شده است. هدف از این بخش، نشان دادن گستردگی پژوهش‌های صورت گرفته در این زمینه است. ژانگ و ژانگ (۲۰۲۲) در پژوهشی، بر اساس داده‌های واقعی از بازار سهام چین، نشان دادند که مدل ICVaR با سناریوی عملی تفسیرپذیر و سازگاراست. باندر، لیندلم، نیکلاسون و تورسن[5] (۲۰۲۲) در پژوهشی به انتخاب پرتفوی بیزینی با استفاده از VaR و CVaR پرداخته‌اند. قهطرانی[6] (۲۰۲۱) در پژوهشی به یک مسئله جدید در انتخاب پرتفوی تحت عدم‌قطعیت پرداخت و بدین نتیجه رسید که فرمول قطعی مدل پیشنهادی بهتر از MAD، CVaR و VaR در شرایط حباب عمل می‌کند. علاوه بر این، فرمول‌های فازی تمامی مدل‌های بیان شده از نظر ریسک حباب بهتر از فرمول‌بندی‌های قطعی خود عمل می‌کنند. حسینی نوده، خنجری شیراز و پردالوس[7] (۲۰۲۲) با فرض توزیع ناشناخته بازده دارایی، یک مسئله بهینه‌سازی

1. Interval-Valued Conditional Value at Risk
2. Closing Price
3. Highest Price
4. Lowest Price
5. Bodnar, Lindholm, Niklasson & Thorsén
6. Ghahtarani
7. Hosseini-Nodeh, Khanjani-Shiraz & Pardalos

پرتفوی استوار را از نظر توزیع با یک محدودیت تصادفی مبهم در نظر گرفتند. هدف آن‌ها، به حداکثر رساندن بازده مورد انتظار در بدترین حالت و مشروط به یک محدودیت غالب تصادفی مرتبه دوم مبهم بود. بازده مورد انتظار به‌طور تصادفی بر معیار در مرتبه دوم بر تمام توزیع‌های ممکن در یک مجموعه غیرقطعی غالب است. مین، دانگ، لیو و گانگ[1] (۲۰۲۱) مدل‌های پرتفوی استوار ترکیبی را تحت مجموعه عدم‌قطعیت بیضی توسعه دادند. در مدل‌های پیشنهادی، یک پارامتر مبادله برای تنظیم سطح خوش‌بینی پرتفوی معرفی شده است. سهگل و مهرا[2] (۲۰۲۰) یک مدل بهینه‌سازی پرتفوی استوار پیشنهاد دادند و بازده ورودی دارایی‌ها را به‌عنوان پارامترهای نامشخص در نظر گرفتند که در فواصل متقارن و محدود برای ایجاد یک پرتفوی بهینه استوار تعریف شدند. دای و وانگ[3] (۲۰۱۹) مدل بهینه‌سازی استوار پرتفوی را توسعه دادند که برای کاهش تأثیر نامطلوب عدم‌قطعیت پارامتری و تخمین خطاهای مدل پرتفوی میانگین واریانس مؤثر بود. پلاچل[4] (۲۰۱۹) رویکردی برای تنظیم کوواریانس و بهینه‌سازی استوار توسعه داد که نشان می‌دهد از طریق تغییرات سیستماتیک مقادیر ویژه ماتریس هم‌بستگی، دستیابی به راه حل‌های بهینه امکان‌پذیر است. استفاده از این روش در بازار سهام، چارچوبی را برای ترکیب منطقی سازگار انتظارات ریسک سیستماتیک در مسئله انتخاب پرتفوی ارائه می‌کند. فخار، مهیاری نیا و زعفرانی[5] (۲۰۱۸) مفهوم جدیدی از تحدب تعمیم‌یافته را در یک نقطه معین برای مجموعه‌ای از توابع با ارزش واقعی معرفی و شرایط بهینگی را برای راه‌حل‌های کارآمد استوار ارزیابی کردند. گابرل و مورات[6] (۲۰۱۸) یک مسئله بهینه‌سازی پرتفوی تحت عدم‌قطعیت در بازده سهام را مورد بررسی قرار دادند که مجموعه عدم‌قطعیت شامل مجموعه محدودی از سناریوها بود که با احتمال مساوی رخ می‌دادند. همچنین معیار استواری معرفی نمودند که به‌دنبال به حداکثر رساندن بازده پرتفوی به ازای نسبتی از سناریوها بود و حداقل بازده را در تمام سناریوها تضمین می‌کرد. چن[7] (۲۰۱۵) مسئله بهینه‌سازی پرتفوی را با فرض اینکه بازده دارایی مخاطره‌آمیز غیر قطعی و اعداد فازی هستند، مورد بررسی قرار داد و یک مدل میانگین ـ نیمه مطلق احتمالی با هزینه‌های تراکنش و محدودیت‌ها کمی در نظر گرفت. در کشورمان نیز حدادی و همکاران (۱۴۰۰) در پژوهشی با عنوان «بهینه‌سازی پرتفوی سهام با معیارهای MAD و CVaR با مقایسه روش‌های کلاسیک و فراابتکاری» بدین نتیجه دست یافتند که روش فرا ابتکاری NSGA2 در مقایسه با روش کلاسیک در حل مسئله بهینه‌سازی پرتفوی، ریسک بیشتری را در دو معیار MAD و CVaR به نمایش می‌گذارد و روش بهتری برای حل مسائل بهینه‌سازی پرتفوی است. سینا و فلاح (۱۳۹۹) در پژوهشی با عنوان «مقایسه عملکرد مدل‌های ارزش در معرض ریسک و کاپیولا- CVaR جهت بهینه‌سازی پرتفوی در بورس اوراق بهادار تهران» نشان دادند که تشکیل پرتفوی سهام بهینه با استفاده از مدل ترکیبی، یعنی مدل کاپیولا- CVaR عملکرد بهتری داشته است. احمدی و همکاران (۱۳۹۹) در پژوهشی با عنوان «تعیین اوزان بهینه پرتفوی سهام با رویکرد VaR و مقایسه آن با مدل

1. Min, Dong, Liu & Gong
2. Sehgal and Mehra
3. Dai and Wang
4. Plachel
5. Fakhar, Mahyarinia and Zafarani
6. Gabrel & Murat
7. Chen

مارکوویتز» نشان دادند که در رویکرد ارزش در معرض ریسک در تشکیل پرتفوی بهینه سهام، ممکن است مرز کارای مدل مارکوویتز تغییر نکند یا محدود شود یا به یک نقطه تبدیل شود و یا حتی از بین برود. طالبلو و داودی (۱۳۹۷) در پژوهشی با عنوان «برآورد پرتفوی بهینه سرمایه‌گذاری با استفاده از دو الگوی ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار (ES)» بدین نتیجه رسیدند که الگوی کاپیولای فرانک و گامبل، در تنوع‌سازی پرتفوی سرمایه‌گذاری کاراتر عمل می‌کند. مدل‌های کلاسیک بهینه‌سازی پرتفوی فرض می‌کنند که داده‌های ورودی قطعی و معین هستند و از موقعیت‌هایی که ساختار مسئله همراه با پارامترهای ورودی و متغیرهای تصمیم غیرقطعی هستند، چشم‌پوشی می‌کنند. همچنین قیمت دارایی‌های پُر ریسک به‌دلیل نوسان‌های سریع و پیچیده بازار مالی رفتاری تصادفی دارد و از عدم اطمینان فزاینده‌ای برخوردار است. با بررسی ادبیات پژوهش درمی‌یابیم که پوشش گستره تغییرات تصادفی در مدل‌های انتخاب پرتفوی مغفول مانده است. از این رو، تخصیص فاصله تصادفی[1] برای توصیف بازده دارایی ریسک می‌تواند عدم قطعیت تصادفی بازه‌ای را پوشش داده و برآورد دقیق‌تر و عملیاتی از ریسک سرمایه‌گذاری در اختیار تصمیم گیرنده قرار دهد. از طرف دیگر، در مدل‌های بهینه‌سازی انتخاب پرتفوی، تضمین حداقل انحراف نامطلوب از مقدار بهینه یا موجه بودن جواب نهایی ضرورت دارد. از این رو، پژوهش حاضر با تعریف ارزش شرطی فاصله‌ای در معرض ریسک یک معیار ریسک منسجم را تولید کرده و از طریق بهینه سازی تصادفی استوار و تعریف سازوکار جریمه ناشی از انحراف از پاسخ مطلوب، موجه بودن جواب نهایی را تضمین می‌نماید.

انتخاب پرتفوی بر اساس ICVaR

مسئله پرتفوی با n دارایی ریسکی را در نظر می‌گیریم. به‌دلیل نوسان‌ها و پیچیدگی در بازارهای مالی، سود غیرقطعی است. ابزارهای مختلفی مانند متغیر تصادفی، متغیر فازی، متغیر با مقدار مجموعه و غیره برای توصیف عدم‌قطعیت وجود دارد. در این پژوهش بازده دارایی (سهام موجود در پرتفوی) به‌عنوان یک فاصله (بازه) تصادفی در نظر گرفته می‌شود که نه تنها تصادفی است، بلکه عدم دقت را نیز شامل می‌شود.

سنجش ریسک با ارزش (مقادیر) فاصله‌ای

متغیر تصادفی با ارزش فاصله‌ای

فرض کنید (Ω, F, P) فضای احتمالی کامل و $\mathbb{R}$ فضای واقعی مجهز به سیگما جبر بورل $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ باشد. $(\mathrm{Kc}(\mathbb{R}))$ $(\mathbb{R})$ نشان دهنده خانواده تمامی زیرمجموعه‌های بسته غیرتهی (به ترتیب غیرتهی، بسته و محدب) $\mathbb{R}$ است.

نگاشت $V\colon \Omega \rightarrow K(\mathbb{R})$ ارزش مجموعه‌ای قابل اندازه‌گیری یا مجموعه تصادفی برای هر عنصر $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{\omega \in \Omega : V(\omega) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$ نامیده می‌شود.

V یک متغیر تصادفی با مقدار فاصله‌ای یا بازه تصادفی نامیده می‌شود، اگر V قابل اندازه‌گیری باشد و مقدار $\mathrm{Kc}(\mathbb{R})$ را در نظر بگیرد. برای هر $X \in Kc(\mathbb{R})$ تابع توزیع V به شرح ذیل تعریف می‌شود:

1. Random Interval

رابطهٔ ۱) $F(X) := P(\omega \in \Omega : V(\omega) \prec X)$

که در آن $\prec$ مرتبه جزیی مطابق با قاعده «میانگین ـ اول، چپ ـ دوم[1]» است. V دامنه انتگرال‌پذیر[2] نامیده می‌شود اگر $\int_\Omega sup_{x\in V(\omega)} |X|dp < \infty$ باشد. همچنین اگر $f(\omega) \in V(\omega)$و $\int_\Omega f dp < \infty$ باشـند، متغیـر تصـادفی f بـا ارزش واقعی یک انتخاب انتگرال‌پذیر V نامیده می‌شود.

برای یک مجموعه تصادفی دامنه انتگرال‌پـذیر V در قالـب $S_v^1 := cl\{f \in L^1(\Omega,\mathbb{R}): f(\omega) \in V(\omega) a.s.\}$ که در آن $L^1(\Omega,\mathbb{R})$ گروه متغیرهای تصادفی با ارزش واقعی انتگرال‌پذیر را نشان می‌دهد که تقریـب cl در $L^1(\Omega,\mathbb{R})$ است. برای دو مجموعه تصادفی V و U، به‌خوبی شناخته شده است که مانند V=U اگر و فقط اگر $S_V^1 = S_U^1$ باشد.

امید ریاضی V به شرح ذیل تعریف شده است:

رابطهٔ ۲) $E(V) = \left\{E(f), f \in S_V^{۱}\right\}$

که تقریبی از $\mathbb{R}$ است.

طبق پژوهش ژانگ و همکاران (۲۰۰۹)، یک مجموعه تصادفی V، یک متغیر تصادفی با ارزش فاصله‌ای است، اگر و اگر $V = [f, g]$ باشد که در آن f و g هر دو متغیرهای تصادفی با مقادیر یا ارزش واقعـی هسـتند. بـرای یـک متغیـر تصادفی با ارزش فاصله‌ای دامنه انتگرال‌پذیر $V = [f, g]$ بدیهی است که $E(V) = [E(f), E(g)]$.

ICVaR و ارزش در معرض ریسک فاصله‌ای[3] (IVaR)

به روشی مشابه ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی معمولی، ارزش در معرض ریسـک فاصـله‌ای (IVaR) و ICVaR را به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱: فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال کامل باشد. با توجه بـه سـطح اطمینـان $1 - \alpha (0 < \alpha < 1)$، ارزش در معرض ریسک تعریف می‌شود:

رابطهٔ ۳) $IVAR := -inf\left\{X \in K_c(\mathbb{R}): P(R < X) = ۱ - \alpha\right\}$

که در آن inf بر اساس مرتبه $\prec$ گرفته می‌شود.

تعریف ۲: فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال کامل باشد. R بازدهی با ارزش فاصـله‌ای تصـادفی یـک دارایـی ریسکی است. با توجه بـه سـطح اطمینـان $1 - \alpha (0 < \alpha < 1)$ IVaR، ارزش در معـرض ریسـک اسـت. ارزش در معرض ریسک شرطی به شرح ذیل تعریف می‌شود:

1. Mean-First, Left-Second
2. Integrably Bounded
3. Interval-Valued Conditional Value at Risk

رابطهٔ ۴)
$$ICVaR := -E(R < -IVaR)$$

مشابه با CVaR با مقادیر واقعی، ICVaR ریسک دنباله را توصیف می‌کند.

قضیه: ICVaR یک معیار ریسک منسجم با ویژگی‌های زیر است:

۱. انتقال‌پذیری
۲. همگن مثبت
۳. تحدب
۴. غلبه تصادفی یکنواخت با مرتبه ۱، غلبه تصادفی یکنواخت با مرتبه ۲.

اثبات: امید ریاضی ارزش فاصله‌ای تصادفی برای ضرایب مثبت خطی است؛ سپس می‌توان نتیجه را به روشی مشابه با مقدار واقعی اثبات کرد.

مدل پرتفوی

فرض کنید نرخ بازده دارایی $R = [r^L, r^U]$ یک متغیر تصادفی با مقدار فاصله‌ای باشد. $R_{ij} = [r_{ij}^L, r_{ij}^U]$ نرخ بازدهی اوراق بهادار i در دوره j باشد که؛

رابطهٔ ۵)
$$i = ۱, \dots, n, \qquad j = ۱, \dots, k$$

با توجه به سطح اطمینان $1 - \alpha$، $IVaR_{ij}(ICVaR_{ij})$ ارزش در معرض ریسک است (ارزش در معرض ریسک شرطی) دارایی ریسکی i در دوره j؛ $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$. با فرض $x_i(i = 1, \dots, 10)$ نسبت iاُم دارایی در پرتفوی باشد. با توجه به قضیه بالا، ICVaR پرتفوی کمتر از ترکیب خطی $ICVaR_i$ با وزن $x_i \geq 0(i = 1, \dots, n)$ است.

اکنون دو مدل از انتخاب نمونه کارها را به شرح زیر می‌سازیم. هدف مدل پرتفوی ارائه شده بهینه‌سازی مدل و حداکثرسازی کل سود به‌دست‌آمده از خرید و فروش سهام است. مقدار دارایی در معرض ریسک، ریسک دنباله[1] و هزینه‌های معامله ناشی از خرید و فروش سهام‌ها غیرقطعی در نظر گرفته شده است. بازده و نقدشوندگی در مدل، به‌عنوان پارامترهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. پرتفوی بهینه، تحت حداکثر سطح ریسک قابل قبول در نظر گرفته شده است. نقدشوندگی هر دارایی، با استفاده از نرخ گردش اندازه‌گیری می‌شود که به واسطه نسبت میانگین حجم سهام معامله شده در بازار به کل تعداد سهام منتشره تعریف می‌شود. نرخ‌های گردش، به‌دلیل وجود اطلاعات ناقص، تنها برآوردهای مبهمی به حساب می‌آیند. پارامترهای مدل به شرح ذیل تعریف می‌شوند:

1. Tail Risk
ریسک دنباله احتمال وقوع زیان به دلیل رویدادی نادر است که توسط توزیع احتمال پیش‌بینی می‌شود. به‌طور محاوره‌ای، حرکت کوتاه‌مدت بیش از سه انحراف استاندارد برای نشان دادن ریسک دنباله در نظر گرفته می‌شود.

اندیس‌ها

i	تعداد دارایی (سهام)
j	تعداد دوره‌ها
b	مجموعه تصادفی
Se	تعداد سناریو

پارامترها

x_i	تعداد سهام در نظر گرفته شده در دارایی (i)
D_{ij}	تعداد دارایی‌های در نظر گرفته شده پرتفوی سهام
l_{ib}	مقدار تصادفی در (i)
u_b	مقدار مجموعه تصادفی

متغیرهای پیوسته

R_i	مجموعه‌ای از تمامی اعداد حقیقی دارایی (i)
μ_{se}	احتمال سناریو
q_i	نرخ گردش دارایی (i)
ICVaR	ارزش در معرض ریسک شرطی ـ فاصله‌ای
Cost(x_i)	هزینه معامله خرید یا فروش دارایی iاُم
v	تعداد سهم خریداری شده
s	تعداد سهم به فروش رفته
deH_{jiSe}	تعداد سهام به فروش نرفته i در دوره j در سناریو Se
dep_{jiSe}	تعداد سهام فروش رفته i در دوره j در سناریو Se
de_{ijse}	سود سهام توزیع نشده i در دوره j در سناریو Se
T_i	دارایی iاُم در پرتفوی سهام

$$maximize \sum_{i=1} x_i\, E(R_i) + \sum_{i=۱} x_i\, E(q_i) - Cost(x_i)$$

s.t

$$\sum_{i=۱}^{n} \left[ICVaR_{ij}^{L}, ICVaR_{ij}^{u}\right] x_i \leq \left[ICVaR_{0j}^{L}, ICVaR_{0j}^{u}\right] D$$ مدل ۱)

مدل ۲) $vx_i . sx_i = \cdot \qquad \forall i$

مدل ۳) $$\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱ , \quad x_i \geq \cdot$$

مدل ۴) $$\sum_{i=۱} x_i + cost(x_i) = ۱$$

مدل ۵) $$\sum_{i=۱}^{n} T_i = D$$

در مدل ۱، تابع هدف حداکثرسازی نقدشوندگی مورد انتظار پرتفوی سهام در مدل پرتفوی بهینه است. محدودیت ۱ ارزش در معرض ریسک شرطی است. محدودیت ۲ نشان می‌دهد که سرمایه‌گذار در هر دوره زمانی موردنظر، بایستی سهمی از دارایی iاُم را خریداری کند (سرمایه‌گذاری) یا به فروش رساند (سرمایه‌برداری)؛ یعنی خرید و فروش سهم یک دارایی، هم‌زمان صورت نمی‌گیرد. محدودیت ۳ مجموع تعداد سهام‌ها را نشان می‌دهد. محدودیت ۴ این فرض را نشان می‌دهد که سرمایه‌گذار، هیچ سرمایه اضافی را در طول مدت متوازن‌سازی مجدد پرتفوی سهام سرمایه‌گذاری نمی‌کند. محدودیت ۵ تعداد دارایی‌های لحاظ شده در پرتفوی سهام را نشان می‌دهد.

رویکرد بهینه‌سازی تصادفی استوار سناریو محور

در دنیای واقعی پارامترها براساس نوسان‌های بازار، از عدم‌قطعیت برخوردارند که در یک مسئله برنامه‌ریزی تصادفی در قالب توزیع‌های احتمالی تبیین می‌گردند (مالوی، واندربری و زنیوس[1]، ۱۹۹۶). در رویکرد برنامه‌ریزی تصادفی طبق مدل زیر، $x \in R^{n1}$ بردار متغیرهای ساختاری و $y \in R^{n1}$ بردار متغیرهای کنترل تعریف می‌شوند.

مدل ۶) $max\ c^T x + d^T y$

S.t.

مدل ۷) $Ax = b$

مدل ۸) $Bx + Cy = e$

مدل ۹) $x, y \geq \cdot$

در مدل فوق عبارت ۷ یک محدودیت ساختاری با ضرایب ثابت است. محدودیت ۸ کنترلی است که ضرایب آن در معرض عدم‌قطعیت هستند و محدودیت ۹ بردارهای متغیر غیرمنفی را تضمین می‌کند. کاربرد مدل فوق، تبیین

1. Mulvey, Vanderberi & Zenios

عدم‌قطعیت‌ها به‌صورت متغیرهای تصادفی است و تصمیم‌گیری تحت احتمالات مختلف انجام می‌شود. عدم‌قطعیت‌های اینجا را می‌توان در یک درخت سناریو مفهوم‌سازی کرد. هر سناریو $Se \in \Omega$ در مجموعه $\Omega = \{۱, ۲, \cdots, Se\}$ تعریف می‌شود. ضرایب و متغیرهای مشمول عدم‌قطعیت شامل $\{B_{Se},\ C_{Se}, e_{Se},\ y_{Se}\}$ با احتمال ثابت μ_{Se} هستند. μ_{Se} احتمال وقوع سناریو Se است و الزاماً $\sum_{Se\in\Omega}\mu_{Se} = ۱$ برقرار است. در این راستا عبارت ۱۳ ارائه می‌شود.

$$max\ \sigma\left(x, y_۱, \dots, y_{Se}\right) + \omega\rho(\delta_۱, \dots, \delta_{Se})$$ مدل ۱۰)

s.t.

$$Ax = b$$ مدل ۱۱)

$$B_{Se}x + C_{Se}y_{Se} + \delta_{Se} = e_{Se} \quad \forall Se \in \Omega$$ مدل ۱۲)

$$x \geq ۰\ , y_{Se} \geq ۰ \qquad \forall Se \in \Omega$$ مدل ۱۳)

بنابراین با توجه به سناریوهای چندگانه، تابع هدف ۶ متغیر تصادفی است که مقدار $\beta_{se} = c^T x + d_{se}^T y_{se}$ را با احتمال μ_{se}، $Se\epsilon\Omega$ می‌گیرد. مدل استوار فوق، قادر به میزان سنجش موزانه بین استواری جواب و استواری مدل است. مدل برنامه‌ریزی خطی با استفاده از میانگین $\delta(\hat{A})$ به صورت زیر فرموله شده است:

$$\delta\left(x, y_۱, y_۲, \dots, y_{Se}\right) = \sum_{Se\in\Omega}\mu_{Se}\beta_{Se}$$ مدل ۱۴)

برای دستیابی به یک جواب نزدیک به بهینه استواری و حداقل‌سازی درجهٔ ریسک مدل، می‌توان مقدار مورد انتظار تابع هدف را در یک سناریو بهینه و واریانس تابع هدف در سناریوهای مختلف به حداقل رساند. بنابراین:

$$\delta\left(x, y_۱, y_۲, \dots, y_{se}\right) = \sum_{se\epsilon\Omega}\mu_{se}\beta_{se} + \gamma\sum_{se\epsilon\Omega}\mu_{se}\left(\beta_{se} - \sum_{se'\epsilon\Omega}\mu_{se'}\xi_{se'}\right)^۲$$ مدل ۱۵)

در عبارت ۱۵، γ درجهٔ ریسک پذیری را نشان می‌دهد. با افزایش γ راه حل نسبت به تغییرات داده‌ها در همه سناریوها کمتر حساس است. همان طور که مشخص است، یک عبارت درجه دوم در تابع هدف وجود دارد که محاسبات را دشوار می‌کند. یو و لی[1] (۲۰۰۹) به‌جای عبارت درجه دوم عبارت ۱۵، از یک عبارت قدرمطلق به‌صورت زیر استفاده کردند.

$$\delta\left(x, y_1, y_2, \dots, y_{se}\right) = \sum_{se\epsilon\Omega}\mu_{se}\beta_{se} + \lambda\sum_{se\epsilon\Omega}\mu_{se}\left|\beta_{se} - \sum_{se'\epsilon\Omega}\mu_{se'}\beta_{se'}\right|$$ مدل ۱۶)

1. Yu and Li

تابع غیرخطی ۱۷ را می‌توان به یک مدل برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف خطی و قیود خطی تبدیل کرد.

مدل ۱۷) $$Max\ \delta\left(x, y_{۱}, y_{۲}, \dots, y_{se}\right) = \sum_{se\epsilon\Omega} \mu_{se}\beta_{se} + \lambda \sum_{se\epsilon\Omega} \mu_{se}\left[(\beta_{se} - \sum_{se'\epsilon\Omega} \mu_{se'}\beta_{se'}) + ۲\pi_{se}\right]$$

S.t.

مدل ۱۸) $$\beta_{se} - \sum_{se'\epsilon\Omega} \mu_{se'}\beta_{se'} + \pi_{se} \geq ۰ \qquad \forall se\epsilon\Omega$$

مدل ۱۹) $$\mu_{se} \geq ۰$$

π_{se} یک متغیر کمکی مثبت است. ضریب ω برای رابطه بین استواری جواب و اسـتواری مـدل بـه کـار مـی‌رود. بنابراین مدل نهایی به صورت زیر است:

مدل ۲۰) $$\mathrm{Max}\ \delta\left(x, y_{۱}, y_{۲}, \dots, y_{se}\right) = \sum_{se\epsilon\Omega} \mu_{se}\beta_{se} + \lambda \sum_{se\epsilon\Omega} \mu_{se}\left[(\beta_{se} - \sum_{se'\epsilon\Omega} \mu_{se'}\beta_{se'}) + ۲\pi_{se}\right] + \omega \sum_{se\epsilon\Omega} \mu_{se}\delta_{se}^{T}\delta_{se}$$

بر اساس روابط فوق، مدل همتای برنامه‌ریزی تصادفی طبق روابط ۶ تا ۲۰ ارائه می‌شوند. فرمول پیشنهادی (یـو و لی، ۲۰۰۰) به صورت زیر است:

مدل ۲۱) $$maximize \sum_{Se}^{۵} \mu_{Se}\left[\sum_{i=۱}^{n} x_{iSe}E(R_{iSe}) + \sum_{i=۱}^{n} x_{iSe}E(q_{iSe}) - Cost(x_{iSe})\right]$$

s.t

مدل ۲۲) $$\left[\sum_{i=۱}^{n} ICVaR_{ijse}^{L} + x_{iSe} \leq \sum_{i=۱}^{n} ICVaR_{ijse}^{u} D_{ijse}\right] \qquad \forall Se, j$$

مدل ۲۳) $$vx_{iSe} - sx_{iSe} = \sum_{j}^{n} de_{ijse} \qquad \forall i, Se$$

مدل ۲۴) $$x_{iSe} = \sum_{j}^{n} dep_{jise} \qquad \forall Se, i$$

مدل ۲۵) $$x_{iSe} + cost(x_{iSe}) = \sum_{j}^{n} de_{ijse} \qquad \forall Se, i$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_{iSe} = \sum_{j}^{n} D_{ijse} \qquad \forall Se, i$$ مدل ۲۶)

بهینه‌سازی استوار رویکردی برای مواجهه با عدم‌قطعیت پارامتری است. با فرض اینکه تصمیم‌گیرنده ریسک‌گریز است برای کنترل و مواجه با ریسک، به‌دنبال استواری مدل و جواب هستیم. هنگامی که راه حل در محدودیت‌های مسئله برای تقریباً تمامی سناریوها موجه باقی بماند، استواری مدل تضمین می‌شود. از طرف دیگر هنگامی که مقدار تابع هدف برای جواب مسئله نزدیک به مقدار بهینه باقی بماند یا دارای حداقل انحراف‌های نامطلوب از مقدار بهینه به ازای هریک از سناریوها باشد، آنگاه استواری بهینگی نیز تأمین شده است.

$$\begin{aligned} maximize \sum_{Se}^{5} \mu_{Se} \left[\sum_{i=1}^{n} x_{iSe} E(R_{iSe}) + \sum_{i=1}^{n} x_{iSe} E(q_{iSe}) - Cost(x_{iSe}) \right] \\ + \gamma \sum_{Se}^{5} \mu_{Se} \left[\left(\beta_{Se} - \sum_{Se'}^{5} \mu_{Se'} \beta_{Se'} \right) + 2\pi_{Se} \right] \\ + \omega \sum_{Se}^{5} \mu_{Se} \left(\sum_{j}^{n} \left(\sum_{b}^{n} deH_{jiSe} + de_{jiSe} \right) + \sum_{i=1}^{n} de_{ijSe} \right) \end{aligned}$$ مدل ۲۷)

S.t

$$\beta_{se} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i) + \sum_{i=1}^{n} x_i E(q_i) - Cost(x_i) \right) + \pi_{se} \geq 0 \;\; \forall Se$$ مدل ۲۸)

$$\sum_{i=1}^{n} ICVaR_{ijse}^{L} x_{ise} + deH_{jiSe} \leq \sum_{i=1}^{n} ICVaR_{ijse}^{u} D_{ijse} \qquad \forall j, Se$$ مدل ۲۹)

$$vx_i - sx_i = de_{jiSe} \qquad \forall i, j, Se$$ مدل ۳۰)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + cost(x_i) = de_{ijSe} \quad \forall j, Se$$ مدل ۳۱)

$$\sum_{i=1}^{n} T_{iSe} = \sum_{j}^{n} D_{ijse} \qquad \forall i, Se$$ مدل ۳۲)

روش‌شناسی پژوهش

این پژوهش سهام ۱۰ شرکت از ۳۰ شرکت بزرگ فهرست شده در بورس تهران را با رعایت اصل تنوع بخشی صنعت به‌عنوان نمونه انتخاب می‌کند. این شرکت‌ها شامل پالایشی، بانک، معادن، هلدینگ، دارو، صنعت فناوری، فلزات و غیره هستند. نمادهای سهام این شرکت‌ها در جدول ۱ آمده است. در این پژوهش قیمت‌های روزانه شامل قیمت بسته شدن روزانه Sj، بالاترین قیمت S_j^U ، پایین‌ترین قیمت S_j^L از فروردین ۱۳۹۶ تا اسفند ۱۴۰۰ جمع‌آوری شده است[۱]. نرم‌افزار R برای انجام تحلیل تجربی استفاده می‌شود. با توجه به قیمت بسته شدن روزانه، بالاترین قیمت و پایین‌ترین قیمت سهام، ارزش قطعی و ارزش فاصله‌ای نرخ بازده محاسبه شده است. همچنین بازده واقعی $r_j = \ln S_j - \ln S_{j-1}$, $r^L_j = \ln S^L_j - \ln S_{j-1}$, $r^U_j = \ln S^U_j - \ln S_{j-1}$, $R_j = [r^L_j , r^U_j]$ بازده فاصله‌ای است و برای تخمین ICVaR از روش شبیه‌سازی تاریخی استفاده شده است. از آنجایی که روش‌های زیادی برای رتبه‌بندی فواصل وجود دارد، در این پژوهش از روش رتبه‌بندی فواصل «میانگین اول، چپ دوم» برای تخمین ICVaR در سطح اطمینان ۹۵ درصد برای راه‌حل‌های بهینه مدل‌های پرتفوی مربوطه استفاده شده است.

جدول ۱. دارایی‌های نمونه

شماره	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰
نماد	وغدیر	وبصادر	کچاد	فولاد	شپنا	رمپنا	خودرو	حکشتی	تاپیکو	اخابر

تجزیه و تحلیل یافته‌ها

با توجه به قیمت بسته شدن روزانه، بالاترین قیمت و پایین ترین قیمت سهام، ارزش قطعی و ارزش فاصله‌ای نرخ بازده محاسبه می‌شود. همان طوری که پیش از این بدان اشاره شد، بازده واقعی $ri = \ln Sdi - \ln Sd_{i-1}$, $rLi = \ln SdLi - \ln Sd_{i-1}$, $rUi = \ln dUj - \ln Sd_{i-1}$, $Ri = [rLi , rUi]$ بازده فاصله‌ای هستند. نتایج به‌دست آمده از مدل، در فواصل مختلف ریسک، در پنج سناریو تحلیل شد که نتایج آن در جدول‌های ۲ تا ۶ درج شده است.

جدول ۲. پرتفوی با ارزش در معرض ریسک شرطی فاصله‌ای [۰/۰۹ , ۰/۰۰۹]

نماد سناریو	اخابر	تاپیکو	حکشتی	خودرو	رمپنا	شپنا	فولاد	کچاد	وبصادر	وغدیر	ارزش تابع	بازده مدل	بازده استوارسازی
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۱	۰/۷۸۶	۰/۱۲۵۳
۲	۰	۰	۰/۹۷۲	۰/۰۲۸	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۱۸	۱/۲۱	۰/۱۵۷۵
۳	۰	۰	۰/۹۳۳	۰/۰۶۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۲۷	۰/۱۹۲	۰/۱۰۱۵
۴	۰	۰	۰/۹۰۳	۰/۰۹۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۵	۰/۳۲۳	۰/۱۹۲۳
۵	۰	۰	۰/۸۶۳	۰/۱۳۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۴	۰/۵۶۲	۰/۲۰۴۱

۱. منبع داده‌ها: http://www.fipiran.com

جدول ۳. پرتفوی با ارزش در معرض ریسک شرطی فاصله‌ای [۰/۰۰٦ , ۰/۰۸]

نماد سناریو	اخابر	تاپیکو	حکشتی	خودرو	رمپنا	شپنا	فولاد	کچاد	وبصادر	وغدیر	ارزش تابع	بازده مدل	ضریب استواری γ
۱	۰	۰	۰/۰۲۵	۰/۸۶۲	۰/۱۱۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۱	۰/۷۸۶	۰/۱۲۵۳
۲	۰	۰	۰/۱۴۶	۰/۶۴۲	۰/۲۱۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۱۸	۱/۲۱	۰/۱۵۷۵
۳	۰	۰	۰/۱۳۱	۰/۵۳۳	۰/۳۳۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۲۷	۰/۱۹۲	۰/۱۰۱۵
۴	۰	۰	۰/۱۸۱	۰/۴۶۵	۰/۳۵۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۵	۰/۳۲۳	۰/۱۹۲۳
۵	۰	۰	۰/۲۰۹	۰/۳۳۱	۰/۴۶۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۴	۰/۵۶۲	۰/۲۰۴۱

جدول‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهند زمانی که حداکثر سطح ریسک پرتفوی با ICVaR متفاوت باشد، انتخاب دارایی‌ها نیز متفاوت خواهد بود. همان طوری که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، سرمایه‌گذاران هنگام استفاده از سطح ریسک $ICVaR_{0j}$ =[۰/۰۰۹ , ۰/۰۹]، فقط از بین ۱۰ نماد بایستی نمادهای حکشتی و خودرو را با درصد سرمایه‌گذاری مختلف در سناریوهای متفاوت انتخاب کنند؛ در حالی اگر سرمایه‌گذاران رویکرد محافظه‌کارانه‌تری را در پیش گیرند، در سطح ریسک کمتر $ICVaR_{0j}$ = [۰/۰۰۶ , ۰/۰۸]، طبق جدول ۳ سهام رمپنا را انتخاب کرده و باید وارد پرتفوی خود کنند؛ زیرا نسبت به حکشتی و خودرو بازدهی پایدار و ریسک کمتری می‌تواند ایجاد کند. همچنین نتایج نشان می‌دهد که هرچه ضریب استواری γ کمتر باشد، تخصیص بیشتر به دارایی‌هایی ریسک کمتری دارد. در جدول ۲، حکشتی و خودرو از نظر ریسک و بازده بالاتر هستند و با وضعیت بازار نیز همخوانی دارند.

جدول ٤. پرتفوی با ارزش در معرض ریسک شرطی فاصله‌ای [۰/۰۰٤ , ۰/۰۵]

نماد سناریو	اخابر	تاپیکو	حکشتی	خودرو	رمپنا	شپنا	فولاد	کچاد	وبصادر	وغدیر	ارزش تابع	بازده مدل	ضریب استواری γ
۱	۰/۰۳۱	۰	۰/۰۳۶	۰/۸۳۶	۰/۰۹۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۱	۰/۷۸۶	۰/۱۲۵۳
۲	۰/۰۸۵	۰	۰/۲۳۸	۰/۶۴۲	۰/۰۳۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۱۸	۱/۲۱	۰/۱۵۷۵
۳	۰/۰۹۱	۰	۰/۲۵۱	۰/۵۰۷	۰/۰۶۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۲۷	۰/۱۹۲	۰/۱۰۱۵
۴	۰/۳۰۴	۰	۰/۲۶۳	۰/۴۰۵	۰/۰۴۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۵	۰/۳۲۳	۰/۱۹۲۳
۵	۰/۳۳۱	۰	۰/۲۷۱	۰/۳۸۵	۰/۱۳۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۴	۰/۵۶۲	۰/۲۰۴۱

جدول ۴ نشان می‌دهد که برای کاهش دامنه ریسک و رویکرد محافظه‌کارانه‌تر و یا برخورداری از اصل تنوع‌بخشی، مجدداً نماد اخابر وارد مدل شده و به متوازن‌سازی مجدد پرتفوی منجر می‌شود. همین تفسیر با ورود نمادهای وغدیر و شپنا در جدول‌های ۵ و ۶ صادق است و این تکرار می‌تواند با کم کردن دامنه ریسک ادامه یابد. همان طوری که ملاحظه می‌شود، در جدول ۲ پرتفوی با حداقل تنوع‌سازی همراه است و در حالی که انتظار می‌رود بالاترین بازدهی را ایجاد کند،

مشاهده می‌شود که در ورود هر نماد با کاهش دامنه ریسک، می‌توان نمادهایی را مشاهده کرد که با ورود در پرتفوی، ضمن تنوع‌سازی به کاهش ریسک منجر می‌شوند.

جدول ٥. پرتفوی با ارزش در معرض ریسک شرطی فاصله‌ای [۰/۰۰۳ , ۰/۰۳]

نماد سناریو	اخابر	تاپیکو	حکشتی	خودرو	رمپنا	شپنا	فولاد	کچاد	وبصادر	وغدیر	ارزش تابع	بازده مدل	ضریب استواری γ
۱	۰/۰۰۰	۰	۰/۱۱۰	۰/۶۰۱	۰/۲۶۶	۰	۰	۰	۰	۰/۰۲۳	۰/۰۱	۰/۷۸۶	۰/۱۲۵۳
۲	۰/۱۳۷	۰	۰/۲۵۲	۰/۴۱۷	۰/۱۶۹	۰	۰	۰	۰	۰/۰۲۵	۰/۱۸	۱/۲۱	۰/۱۵۷۵
۳	۰/۱۹۸	۰	۰/۲۳۹	۰/۳۹۷	۰/۱۳۴	۰	۰	۰	۰	۰/۰۳۲	۰/۰۲۷	۰/۱۹۲	۰/۱۰۱۵
۴	۰/۳۸۷	۰	۰/۲۱۴	۰/۳۸۴	۰/۱۰۷	۰	۰	۰	۰	۰/۲۹۶	۰/۰۵	۰/۳۲۳	۰/۱۹۲۳
۵	۰/۴۰۲	۰	۰/۱۷۶	۰/۱۶۷	۰/۰۵۹	۰	۰	۰	۰	۰/۱۹۶	۰/۰۴	۰/۵۶۲	۰/۲۰۴۱

جدول ٦. پرتفوی با ارزش در معرض ریسک شرطی فاصله‌ای [۰/۰۰۲ , ۰/۰۲]

نماد سناریو	اخابر	تاپیکو	حکشتی	خودرو	رمپنا	شپنا	فولاد	کچاد	وبصادر	وغدیر	ارزش تابع	بازده مدل	ضریب استواری γ
۱	۰/۰۸۹	۰	۰/۱۹۸	۰/۴۷۹	۰/۱۴۸	۰/۰۳۳	۰	۰	۰	۰/۰۵۵	۰/۰۱	۰/۷۸۶	۰/۱۲۵۳
۲	۰/۱۶۳	۰	۰/۲۶۵	۰/۳۷۲	۰/۱۰۸	۰/۰۲۴	۰	۰	۰	۰/۰۶۸	۰/۱۸	۱/۲۱	۰/۱۵۷۵
۳	۰/۱۸۲	۰	۰/۲۵۶	۰/۳۵۱	۰/۰۸۱	۰/۰۳۱	۰	۰	۰	۰/۰۶۹	۰/۰۲۷	۰/۱۹۲	۰/۱۰۱۵
۴	۰/۱۹۱	۰	۰/۲۹۴	۰/۲۷۶	۰/۰۲۵	۰/۰۳۹	۰	۰	۰	۰/۱۷۵	۰/۰۵	۰/۳۲۳	۰/۱۹۲۳
۵	۰/۲۷۶	۰	۰/۳۴۷	۰/۱۳۷	۰/۰۰۰	۰/۰۵۸	۰	۰	۰	۰/۱۸۲	۰/۰۴	۰/۵۶۲	۰/۲۰۴۱

نتیجه‌گیری

تصمیم‌گیری درباره اینکه کدام سهم، برای ورود به سرمایه‌گذاری در پرتفوی سهام مناسب است، دشوار است. به عبارتی دیگر، کدام سهم از لحاظ ریسک و بازده در مقایسه با سایر سهم‌ها وضعیت بهتر و ارزش سرمایه‌گذاری بیشتری دارد. پیش از این برای ایجاد یک پرتفوی متنوع، علاوه‌بر در نظر گرفتن تنوع صنعت، در نظر گرفتن هم‌بستگی پایین یک دارایی با سایر دارایی‌ها مدنظر بوده است، در حالی که ریسک دارایی نیز به نوع صنعت، اندازه و زمان معامله بستگی دارد. در این پژوهش انتخاب بهینه پرتفوی در محیطی با ارزش فاصله‌ای تحلیل شد. از این‌رو، ابتدا ارزش فاصله‌ای در CVaR

تعریف شد که یک معیار ریسک منسجم با ویژگی متمایز دیگر را ایجاد کرد. سپس بر اساس این سنجه ریسک، مدل انتخاب پرتفوی طراحی شد که در آن ریسک و بازده یک دارایی ریسکی، در فواصل تصادفی در نظر گرفته شدند. همچنین در این پژوهش با توجه به غیرقطعی بودن معاملات دارایی همتای استوار مدل ارائه شد. هدف از ارائه این مدل، به حداقل رساندن ریسک موجود در پرتفوی بوده است. در نهایت، مدل ارائه شده در این پژوهش نشان داد که می‌توان ترجیح ذهنی یا تنفر سرمایه‌گذاران از ریسک را با رعایت اصل تنوع‌بخشی در پرتفوی توصیف کرد که این خود به‌نوعی نوآوری متفاوتی از مدل کلاسیک پرتفوی را ارائه می‌دهد. همچنین با بهینه‌سازی استوار، تمامی سناریوها با بدترین حالت ممکن در مدل بهینه شد و نتایج نشان داد که هر چه این دامنه کوچک‌تر در نظر گرفته شود، شدت ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاران بیشتر نمایان می‌شود. این نتایج مشابه نتایج پژوهش ژانگ و ژانگ (۲۰۲۲) است. با استناد به این نتایج می‌توان به مدیران پرتفوی (سبدگردانی) پیشنهاد کرد تا با توجه به آستانه یا تحمل ریسک هر شخص سرمایه‌گذار، پرتفویی متناسب آن‌ها را طراحی کنند و انتظار می‌رود برای سرمایه‌گذاران نیز این روش اهمیت خاصی در پی داشته باشد.

منابع

احمدی، سیدمحمدمهدی؛ لطفی، حسن و رجبی، ولی (۱۳۹۹). تعیین اوزان بهینه پرتفوی سهام با رویکرد VaR و مقایسه آن با مدل مارکوویتز. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۱۱(۴۵)، ۵۷۱-۵۸۶.

تقی‌زادگان، غلام رضا؛ زمردیان، غلامرضا؛ فلاح شمس، میرفیض و سعدی، رسول (۱۴۰۲). مقایسه عملکرد مدل‌های مارکوییتز و مدل ارزش در معرض خطر براساس ریسک عدم نقدشوندگی ـ تی کاپولا با هم‌بستگی شرطی پویا (DCC t-Cupola LVaR) جهت بهینه‌سازی پرتفوی در بورس اوراق بهادار تهران. *تحقیقات مالی*، ۲۵(۱)، ۱۵۲- ۱۷۹.

حدادی، محمدرضا؛ نادمی، یونس؛ طافی، فاطمه (۱۴۰۰). بهینه‌سازی سبد سهام با معیارهای MAD و CVaR با مقایسه روش‌های کلاسیک و فراابتکاری. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۱۲(۴۷)، ۵۱۴-۵۳۳.

راعی، رضا؛ باسخا، حامد و مهدی خواه، حسین (۱۳۹۹). بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از روش Mean-CVaR و رویکرد ناهم‌سانی واریانس شرطی متقارن و نامتقارن. *تحقیقات مالی*، ۲۲(۲)، ۱۴۹-۱۵۹.

راعی، رضا؛ نمکی، علی و احمدی، مؤمن (۱۴۰۱). پیاده‌سازی رویکرد استوار نسبی برای انتخاب پرتفوی بهینه در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم. *تحقیقات مالی*، ۲۴(۲)، ۱۸۴-۲۱۳.

سینا، افسانه و فلاح، میرفیض (۱۳۹۹). مقایسه عملکرد مدل‌های ارزش در معرض ریسک و کاپیولا- CVaR جهت بهینه‌سازی پرتفوی در بورس اوراق بهادار تهران. *چشم‌انداز مدیریت مالی*، ۱۰(۲۹)، ۱۲۵-۱۴۶.

شیری قهی، امیر؛ دیده‌خانی، حسین؛ خلیلی، کاوه و سعیدی، پرویز (۱۳۹۶). مطالعه تطبیقی مدل بهینه‌سازی پرتفوی چند دوره‌ای چندهدفه در محیط اعتبار فازی با معیارهای متفاوت ریسک. *راهبرد مدیریت مالی*، ۵(۳)، ۱-۲۶.

طالبلو، رضا و داودی، محمد مهدی (۱۳۹۷). برآورد پرتفوی بهینه سرمایه‌گذاری با استفاده از دو الگوی ارزش در معرض ریسک (VaR) و ریزش مورد انتظار (ES): رهیافتGARCH-EVT-Copul. *پژوهشنامه اقتصادی*، ۱۸(۷۱)، ۹۱-۱۲۵.

راشف، اسوتلوزارتودورف و فابوتسی، فرانک ج. (۱۳۹۷). *مدل‌های تصادفی پیشرفته ارزیابی ریسک و بهینه‌سازی پرتفوی* (فخرالدین فخرحسینی و میثم کاویانی، مترجمان)، تهران: انتشارات کتاب مهربان.

مارتی، ولفگانگ (۱۴۰۱). *تحلیل پرتفوی (مقدمه‌ای از سنجش ریسک و بازده)*، (فخرالدین فخرحسینی و میثم کاویانی، مترجمان)، تهران: انتشارات آرون.

گوهرنیا، الهه؛ منصورفر، غلامرضا؛ بیگلری، فهیمه (۱۴۰۲). الگوریتم نقطه‌درونی در بهینه‌سازی سبد سهام چند هدفه: رویکرد GlueVaR. تحقیقات مالی.

References

Ahmadi, S., Lotfi, H., Rajabi, V. (2020). Determine the optimal portfolio weights var-stock approach And compare it with the Markowitz model. *Financial Engineering and Portfolio Management*, 11(45), 571-586. (*in Persian*)

Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming*, (88), 411-424.

Bertsimas, D., & Sym, M. (2004). The Price of the Robustness. *Operations Research*, (52), 35-53.

Bodnar, T., Lindholm, M., Niklasson, V., & Thorsén, E. (2022). Bayesian portfolio selection using VaR and CVaR. *Applied Mathematics and Computation*, 427, 127120.

Dai, Z., & Wang, F. (2019). Sparse and robust mean–variance portfolio optimization problems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 523, 1371-1378.

Fakhar, M., Mahyarinia, M. R., & Zafarani, J. (2018). On nonsmooth robust multiobjective optimization under generalized convexity with applications to portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, 265(1), 39-48.

Rachev, S. & Fabozzi, F.G. (2018). *Advanced stochastic models of risk assessment and portfolio optimization* (Fakhrhosseini and Kaviani, Trans.). Tehran, Mehraban. (*in Persian*)

Gabrel, V., & Murat, C. (2018). Portfolio optimization with pw-robustness. *EURO Journal on Computational Optimization*, 6(3), 267-290.

Ghahtarani, A. (2021). A new portfolio selection problem in bubble condition under uncertainty: Application of Z-number theory and fuzzy neural network. *Expert Systems with Applications*, 177, 114944.

Giove, S., Funari, S. and Nardelli, C. (2006). An interval portfolio selection problem based on regret function. *European Journal of Operational Research*, 170(1): 253-264.

Gohania, E., Mansourfar, G., & Biglari, F. (2023). Interior point algorithm in multi-objective portfolio optimization: GlueVaR approach. *Financial Research Journal* .(*in Persian*)

Haddadi, M., Nademi, Y., Tafi, F. (2021). Stock Portfolio Optimization with MAD and CVaR Criteria by Comparing Classical and Metaheuristic Methods. *Financial Engineering and Portfolio Management*, 12(47), 514-533. (*in Persian*)

Hosseini-Nodeh, Z., Khanjani-Shiraz, R., & Pardalos, P. (2022). Distributionally robust portfolio optimization with second-order stochastic dominance based on wasserstein metric. *Information Sciences*, 613, 828-852.

Ida, M. (2003). Portfolio selection problem with interval coefficients. *Applied Mathematics Letters,* 16(5), 709-713.

Kara, E. K., & Kemaloglu, S. A. (2017). Risk Measures of the ERNB Distribution Generated by G-NB Family. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 5(1), 77-84.

Marty, W. (2022). *Portfolio analysis (an introduction to risk and return measurement),* (Kaviani, M and Fakhrhosseini, S. F., Trans.). Arvan Publications, Tehran. (*in Persian*)

Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management science*, 37(5), 519-531.

Li, Z., Zhang, J. & Wang, X. (2017). Interval-valued risk measure models and empirical analysis. Fuzzy Systems Association, *International Conference on Soft Computing & Intelligent Systems.* IEEE.

Lu, Z. (2011). Robust portfolio selection based on a joint ellipsoidal uncertainty set, *Optimization Methods and Software*, 26(1), 89–104.

Min, L., Dong, J., Liu, J. & Gong, X. (2021). Robust mean-risk portfolio optimization using machine learning-based trade-off parameter. *Applied Soft Computing*, 113, 107948.

Mulvey, J., Vanderberi, R., & Zenios, S. (1995). Robust Optimization of Large-Scale Systems. Operations research. *Operations Research*, 43, 264-281.

Plachel, L. (2019). A unified model for regularized and robust portfolio optimization. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 109, 103779.

Raei, R., Basakha, H., & Mahdikhah, H. (2020). Equity Portfolio Optimization Using Mean-CVaR Method Considering Symmetric and Asymmetric Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Financial Research Journal*, *22*(2), 149-159. (*in Persian*)

Raei, R., Namaki, A., & Ahmadi, M. (2022). Applying the Relative Robust Approach for Selection of Optimal Portfolio in the Tehran Stock Exchange by Second-order Conic Programming. *Financial Research Journal*, *24*(2), 184-213. (*in Persian*)

Sehgal, R. & Mehra, A. (2020). Robust portfolio optimization with second order stochastic dominance constraints. *Computers & Industrial Engineering*, 144, 106396.

Sharma, A., Utz, S. & Mehra, A. (2017). Omega-CVaR portfolio optimization and its worst case analysis. *OR Spectrum*, 39(2), 505–539.

Shiri Ghahi, A., Didehkhani, H., Khalili Damghani, K., & Saeedi, P. (2017). A Comparative Study of Multi-Objective Multi-Period Portfolio Optimization Models in a Fuzzy Credibility Environment Using Different Risk Measures. *Financial Management Strategy*, 5(3). (*in Persian*)

Sina, A., & Fallah, M. (2020). Comparison of Value Risk Models and Coppola-CVaR in Portfolio Optimization in Tehran Stock Exchange. *Journal of Financial Management Perspective*, 10(29). (*in Persian*)

Soyster, A. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operation Research*. (21), 1154-1157.

Taghizadegan, G. R., Zomorodian, G., Falah Shams, M. & Saadi, R. (2023). Comparing the performance of Markowitz models and value-at-risk model based on illiquidity risk-T-Cupola with dynamic conditional correlation (DCC t-Cupola LVaR) for portfolio optimization in Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, *25*(1), 152-179. (*in Persian*)

Taleblou, R., & Davoudi, M. (2018). Estimation of Optimal Investment Portfolio Using Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES) Models: GARCH-EVT-Copula Approach. *Economics Research*, 18(71), 91-125. (*in Persian*)

Chen, W. (2015). Artificial bee colony algorithm for constrained possibilistic portfolio optimization problem. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, 429, 125-139.

Yu, C. S., & Li, H. L. (2000). A robust optimization model for stochastic logistic problems. *International Journal of Production Economics*, 64(1-3), 385-397.

Yu, J. R., Chiou, W. J. P., Lee, W. Y., & Chuang, T. Y. (2019). Realized performance of robust portfolios: Worst-case Omega vs. CVaR-related models. *Computers & Operations Research*, *104*, 239-255.

Zhang, J. & Zhang, K. (2022). Portfolio selection models based on interval-valued conditional value at risk (ICVaR) and empirical analysis. *Fractal Fract.* arXiv preprint arXiv:2201.02987.

Zhang, J., Li, S., Mitoma, I., & Okazaki, Y. (2009). On set-valued stochastic integrals in an M-type 2 Banach space. *Journal of mathematical analysis and applications*, 350(1), 216-233.

Zymler, S., Rustem, B. & Kuhn, D. (2011). Robust portfolio optimization with derivative insurance guarantees. *European Journal of Operational Research*, 210 (2), 410-424.