تحقیقات مالی

دانشکده مدیریت دانشگاه تهران

دوره ۱۴، شماره ۲
پاییز و زمستان ۱۳۹۱
صص ۱۳۲-۱۱۷

بهینه‌سازی پرتفوی سهام در شرایط مجاز بودن فروش استقراضی و برخی محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه

حمیدرضا قاسمی[1]، امیرعباس نجفی[2]

چکیده: ممنوعیت فروش استقراضی (نامنفی بودن اوزان دارایی) یکی از فرض‌های اولیه‌ی مدل مارکویتز است که تنها وضعیت خرید را برای دارایی‌ها ممکن می‌کند. حل مدل کوآدراتیک مارکویتز با در نظر گرفتن تنها دو محدودیت بازده و بودجه، مرز کارای نامقید سرمایه‌گذاری را به‌دنبال دارد. در سال‌های گذشته، معرفی سایر محدودیت‌های کاربردی منجر به توسعه‌ی مدل اولیه‌ی مارکویتز شده‌اند. در پژوهش پیش رو، مدلی نوین برای بهینه‌سازی پرتفو ارائه شده است که افزون‌بر مجاز شمردن فروش استقراضی، برخی محدودیت‌های کاربردی بازار نیز به مدل تحمیل شده است. با استفاده از اطلاعات قیمت ۱۵ سهم، مدل غیرخطی پیشنهادی با به‌کارگیری ابزارهای استاندارد حل شده و مرز کارای مقید ترسیم شده است.

واژه‌های کلیدی: ***بهینه‌سازی پرتفوی، مدل میانگین ـ واریانس، فروش استقراضی، مرز کارا، برنامه‌ریزی کوآدراتیک.***

طبقه‌بندی JEL: G11-C61.

۱. کارشناس ارشد مهندسی مالی، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
۲. استادیار مهندسی صنایع، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۰۹/۱۵
تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۱/۰۳/۰۱
نویسنده مسئول مقاله: امیرعباس نجفی
E-mail: aanajafi@kntu.ac.ir

مقدمه

هدف از حل مسائل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری (پرتفوی) آن است که از بین یک مجموعه دارایی‌های در دسترس، پرتفویی انتخاب شود که افزون‌بر کمینه‌سازی ریسک پرتفوی، یک سطح حداقلی از بازده پرتفوی را نیز برای سرمایه‌گذار برآورده کند. رویکرد حل این‌گونه مسائل آن است که ماکزیمم‌سازی بازده را تنها پارامتر در نظر نگرفته، بلکه تنوع‌بخشی[1] پرتفوی را نیز به‌منزله‌ی معیار دیگر سرمایه‌گذاری مطرح می‌کند (Hicks, 1935). مدل پایه‌ای مسئله‌ی انتخاب پرتفوی را نخستین‌بار مارکویتز مطرح کرد که یک مدل درجه دوم[2] بوده و می‌تواند به‌صورت تحلیلی توسط ابزارهای استاندارد حل شود. در این مدل پایه، تنها محدودیت‌های بازده و بودجه در نظر گرفته شده است (Markowitz, 1952). حال چنانچه این مدل به‌ازای مجموعه‌ای از مقادیر مختلف سطح حداقلی بازده پرتفوی، به‌طور مکرر حل شود و در ادامه، نمودار بازده ـ ریسک پرتفوی به‌ازای جواب‌های مختلف ترسیم شود، به مجموعه نقاطی با عنوان مرز کارا[3] دست می‌یابیم. با استخراج مرز کارا (به‌منزله‌ی مجموعه جواب بهینه)، سرمایه‌گذار این امکان را خواهد داشت تا بر اساس نیازمندی ریسک / بازده مورد نظر خود، پرتفوی بهینه را از این مجموعه انتخاب کند که این انتخاب به ریسک‌گریزی[4] و ریسک‌پذیری سرمایه‌گذار بستگی دارد. در ادامه مدل پایه‌ای مارکویتز و برخی توسعه‌های صورت گرفته آن، آورده شده است.

بیان مسئله

یکی از مباحث نوین بازارهای سرمایه، آن است که سرمایه‌گذار دارایی که در اختیارش نیست را در بازار فروخته و درآمد حاصل از آن را در سایر دارایی‌ها سرمایه‌گذاری می‌کند. به‌گفته‌ی دیگر، دارایی را به امید کاهش قیمت، قرض کرده و در زمان افت قیمت به قرض‌دهنده‌ی دارایی بازمی‌گرداند و از این راه سود می‌کند. این رویکرد با نام فروش استقراضی مطرح است که در ادامه به‌طور گسترده‌تری مورد بحث واقع خواهد شد.

در نوشتار حاضر، مدلی در حوزه‌ی مسائل انتخاب پرتفوی مطرح می‌شود که مجاز بودن فروش استقراضی و اِعمال برخی محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه را همراه با هم در نظر می‌گیرد. برتری این مدل آن است که برای پوشش ریسک ناشی از افت قیمت دارایی در آینده، درصدی از بازده بدون ریسک در اختیار قرض‌دهنده‌ی دارایی قرار می‌گیرد که این امر درنهایت

1. Diversification
2. Quadratic
3. Efficient Frontier
4. Risk-aversion

موجب انگیزش و ترغیب سرمایه‌گذاران به خرید و فروش در بازار خواهد شد. مدل ارائه شده با استفاده از داده‌های ۱۵ سهم واقعی حل شده و مرز کارای سرمایه‌گذاری ترسیم و در انتها نتایج آورده شده است.

پیشینه‌ی پژوهش

پیشینه‌ی نظری (مدل پایه‌ای مارکویتز)

با در نظر گرفتن فروض نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها، بازار کامل بدون مالیات (بدون هزینه‌های معاملاتی)، ممنوعیت فروش استقراضی (نامنفی بودن اوزان دارایی) و تقسیم‌پذیر بودن دارایی‌ها، مدل پایه‌ی مارکویتز به‌شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۱ بیان می‌شود:

رابطه‌ی ۱)
$$min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$$

Subject to

رابطه‌ی ۲)
$$\sum_{i=1}^{n} r_i\, x_i \geq r_e$$

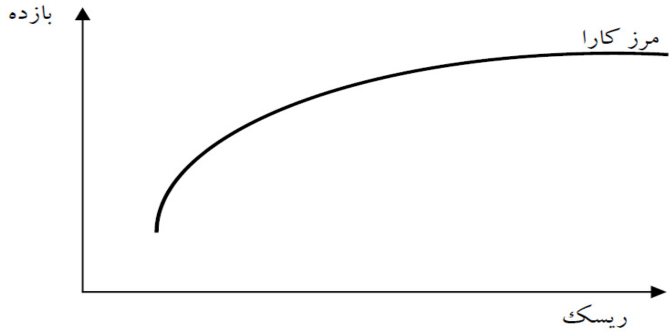
رابطه‌ی ۳)
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

رابطه‌ی ۴)
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1 \ldots . n$$

که در آن؛

n : تعداد دارایی‌ها؛ x_i : نسبت (وزن) سرمایه‌گذاری شده در دارایی iام؛ r_i : بازده انتظاری دارایی i ام؛ σ_{ij} : کوواریانس بین بازده دارایی i و j است.

در این مدل تابع هدف، واریانس پرتفوی (σ_P^2) بوده که از رابطه‌ی $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$ به‌دست می‌آید. همچنین بازده انتظاری پرتفوی از رابطه‌ی $\sum_{i=1}^{n} r_i\, x_i$ حاصل می‌شود. r_e نیز بیانگر حداقل بازده انتظاری سرمایه‌گذار از پرتفوی مورد نظر است. محدودیت رابطه‌ی شماره‌ی ۳، اطمینان می‌دهد که مجموع اوزان دارایی بیشتر از یک نمی‌شود. با حل مکرر مسئله‌ی فوق، به‌ازای مجموعه‌ای از مقادیر مختلف r_e، مرز کارای سرمایه‌گذاری به‌شکل نمودار شماره‌ی ۱ ترسیم می‌شود. با استفاده از این مرز کارا، سرمایه‌گذار می‌تواند بر اساس نیازمندی‌های ریسک/بازده مورد نظر خود، پرتفوی بهینه را انتخاب کند.



نمودار ۱. مرز کارای سرمایه‌گذاری

ضعف اصلی مدل پایه‌ی مارکویتز این بود که بسیاری از جنبه‌های معـاملاتی دنیـای واقعـی، همچون بیشینه‌ی (ماکزیمم) اندازه‌ی پرتفوی، کمینـه‌ی (مینـیمم) سـهام و... را در مـدل‌سـازی مربوطه شرکت نمی‌داد. سایر محققان، این جنبه‌ها را با معرفـی محـدودیت‌هـایی (از نـوعی کـه کاربردی نامیده می‌شوند)، به مدل تحمیـل کـرده و موجـب گسـترش آن شـدند. برخـی از ایـن محدودیت‌های کاربردی در ادامه آورده شده است.

پیشینه‌ی تجربی

محدودیت تعداد سهام پرتفوی

تعداد دارایی‌های موجود در پرتفوی اغلب، یا با یک مقدار داده شده تعیین می‌شوند یا محدود شده هستند. از طریق معرفی یک متغیر دودویی z_i (که اگر دارایی i در پرتفوی موجود باشد، مساوی ۱ و در غیر این صورت صفر است)، این محدودیت می‌تواند به‌شـکل رابطـه‌ی شـماره‌ی ۵ بیـان شود.

رابطه‌ی ۵)
$$\sum_{i=1}^{n} z_i \leq k$$

این محدودیت به این منظور تحمیل می‌شود که مدیریت پرتفوی تسهیل‌شده و هزینـه‌هـای مدیریتی پرتفوی کـاهش یابـد. شـکل نامسـاوی فـوق کـاملاً رایـج اسـت (Schaerf, 2002; Kellerer & Maringer, 2003; Maringer, 2005)، همچنین یک حد پایین نیـز مـی‌توانـد به‌شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۶ معرفی شود (Di Gaspero et al., 2007; Chiam et al., 2008):

رابطه‌ی ۶)
$$k_{min} \leq \sum_{i=1}^{n} z_i \leq k_{max}$$

اگرچه این محدودیت می‌تواند به شکل تساوی نیز بیان شـود (Soleimani et al., 2009; Armãnanzas & Lozano, 2005)؛ یعنی:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = k$$

محدودیت تعداد سهام پرتفوی گاهی نیز به‌عنـوان تـابع هـدف در نظـر گرفتـه شـده اسـت (Anagnostopoulos & Mamanis, 2010).

محدودیت‌های سقف و کف

با اِعمال این محدودیت‌ها، یک کمینه و بیشینه نسبت (به‌ترتیب ε_i و δ_i) برای هر دارایی، مجـاز است که در پرتفوی نگهداری شود، به‌طـوری کـه $x_i = 0 , \varepsilon_i \leq x_i \leq \delta_i \ (i = 1 \dots n)$. بـه بیان دیگر، سهم پرتفوی برای یک دارایی خاص، در یک بازه‌ی داده شده تغییر می‌کند (Chiam et al., 2008):

رابطه‌ی ۷)
$$\varepsilon_i z_i \leq x_i \leq \delta_i z_i$$

محدودیت‌های سقف (محدودیت‌های حد بالا)، بـرای جلـوگیری از تجـاوز بـیش از انـدازه‌ی نسبت دارایی خاص معرفی می‌شوند و در برخی موارد توسط قوانین و مقررات بـه مـدل تحمیـل می‌شوند. محدودیت‌های کف (حد پایین) برای جلوگیری از هزینه‌ی مدیریت نسـبت‌هـای بسـیار کم دارایی‌ها به‌کار گرفته می‌شوند و ممکن است توسط هزینه‌های معاملاتی ایجاب شوند.

پس چنانچه فروش استقراضی ممنوع شود، محدودیت رابطه‌ی شـماره‌ی ۴ در مـدل پایـه‌ای مارکویتز ($x_i \geq 0$) به هنگام تحمیل محدودیت‌های کف، زائد می‌شود.

فروش استقراضی

فرض کنید در زمان t یک سرمایه‌گذار پیش‌بینی می‌کند که قیمت دارایی i در زمان آتی افزایش خواهد یافت. برای دست‌یابی به سود، می‌بایست دارایی i را به قیمت بازاری $S_{i,t}$ خریداری کرده و چنانچـه $S_{i,u} > S_{i,t}$ بـود، در زمـان $u(u > t)$ آن را فروختـه و بـه انـدازه‌ی اخـتلاف $S_{i,u} - S_{i,t}$ سود کسب کند. به‌طور معکوس اگر در زمان t سرمایه‌گذار پیش‌بینی کند که قیمت دارایی i در زمان آتی افت خواهد داشت، او این اختیار را خواهد داشت کـه اکنـون دارایـی i را از کارگزار قرض کرده و به بازار بفروشد و در زمان $u(u > t)$ آن را خریداری کـرده و بـه همـان

کارگزار بازگرداند. در این مورد او به‌اندازه‌ی $S_{i,t} - S_{i,u}$ (منهای حق دلالی) سود کسب می‌کند. این راهبرد، فروش استقراضی نامیده می‌شود.

مدل پایه‌ای مارکویتز، نامنفی بودن اوزان (ممنوعیت فروش استقراضی) را بـه مـدل تحمیـل می‌کند. فروش استقراضی را می‌توان با جایگزینی رابطه‌ی شماره‌ی ۸ به جای رابطه‌ی شـماره‌ی ۴ در مدل پایه، مجاز کرد:

رابطه‌ی ۸) $$x_i \in R \qquad i = 1 \dots . n$$

این مدل به مدل بلک اشاره دارد (Black, 1972) و برای مدل‌سازی فروش استقراضی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از مطالعات انجام گرفته در زمینه‌ی فروش استقراضی، مـی‌تـوان بـه یـو و همکاران (۲۰۰۸)؛ رولاند (۱۹۹۷) و کراما و سکینز (۲۰۰۳) اشاره کرد.

چنانچه قرض‌گیرنده‌ی دارایی یک سرمایه‌گذار کوچک باشد، بهـره‌ای از درآمـدهای فـروش استقراضی به‌دست نمی‌آورد، در غیر این صورت، بـه‌طـور معمـول تنهـا بخشـی از بهـره (h^1) را به‌دست می‌آورد. برای به‌شمار آوردن تمـامی ایـن پدیـده‌هـا، ابتـدا بـازده یـک پرتفـوی، شـامل دارایی‌هایی می‌شود که می‌بایست فروش استقراضی نیز در آن تعریف شود:

رابطه‌ی ۹) $$r_P = \sum_{i=1}^{n} (r_i - h_i . r_c) x_i$$

رابطه‌ی ۱۰) $$h_i = 0 \ \ if \ \ x > 0 \quad 0 \le h_i \le 1 \quad \ otherwise$$

به‌طوری که h، برابر صفر است، اگر سرمایه‌گذار در موقعیت خرید دارایی باشد و مثبت اسـت اگر دارایی فروش استقراضی شود (Jacobs et al., 2005 & 2006).

مدل پیشنهادی

در این بخش، مدل ارائه‌شده به‌تفکیک اجزا مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مفروضات مدل

N : تعداد دارایی‌های در دسترس؛

$\overline{R_i} = E(R_i)$: بازده انتظاری دارایی i ام ($i = 1 \ to \ N$)؛

σ_{ij} : کوواریانس بین دارایی‌های i و j؛

R_{e} : حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار از پرتفوی مورد نظر؛

R_{f} : بازده بدون ریسک؛

K: بیشینه‌ی تعداد سهام موجود در پرتفوی؛

X_i : وزن دارایی موجود در پرتفوی؛

β_i & α_i : حد پایین و بالای دارایی i ام در وضعیت خرید؛

γ_i& θ_i : حد پایین و بالای دارایی i ام در وضعیت فروش استقراضی؛

$h_i(Short - rebate)$: درصد بازگردانی به قرض‌دهنده‌ی دارایی.

شایان ذکر است، فروض مدل پایه‌ای مارکویتز، یعنی نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها، بازار کامل بدون مالیات (بدون هزینه‌های معاملاتی) و تقسیم‌پذیر بودن دارایی‌ها، همچنان به‌عنوان فرض‌های اولیه‌ی مدل پیشنهادی پابرجا بوده، با این تفاوت که فروش استقراضی در این مدل مجاز شمرده شده است. بنابراین، جامعه‌ی آماری برای آزمون مدل نیز بازار سرمایه‌ای خواهد بود که امکان فروش استقراضی در تمامی دارایی‌های آن یا حتی‌الامکان بخشی از آن بازار، وجود داشته باشد. از این رو، نمونه‌ی آماری مورد نظر می‌بایست از میان آن دسته دارایی‌هایی انتخاب شود که فروش استقراضی در آنها مانعی ندارد.

تابع هدف مدل

تابع هدف در مدل مورد نظر، کمینه‌کردن ریسک پرتفوی (واریانس پرتفوی) در نظر گرفته شده است که به‌شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۱۱ بیان می‌شود:

رابطه‌ی ۱۱)
$$Min\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

محدودیت‌های مدل

محدودیت حداقل بازده مورد انتظار[1]

با توجه به مجاز بودن فروش استقراضی در مدل، برای آنکه صاحب اصلی دارایی که دارایی را به ما قرض داده، بتواند ریسک ناشی از کاهش قیمت آتی آن را پوشش دهد، می‌بایست درصدی از بازده بدون ریسک را در اختیار او قرار دهیم تا انگیزه‌ی انجام فروش استقراضی در بازار وجود داشته باشد. با در نظر گرفتن این نکته، محدودیت حداقل بازده مورد انتظار مدل پایه‌ی مارکویتز (رابطه‌ی شماره‌ی ۲) به‌شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۱۲ بازنویسی خواهد شد:

رابطه‌ی ۱۲)
$$E\left(R_P\right) = \sum_{i=۱}^{N}\left[k_i X_i\left(\overline{R_i} - \left(۱-\delta_i\right)h_i R_f\right)\right] \geq R_e$$

1. Minimum Desired Expected Return Constraint

که در آن؛ $h_i(Short - rebate)$ درصدی از بازده بدون ریسک است که به قرض‌دهنده‌ی دارایی، به‌ازای هر واحد دارایی می‌دهیم و در بازه‌ی [۱ , ۰] تغییر می‌کند و می‌تواند به‌صورت قطعی یا تصادفی باشد. متغیرهای k_i و δ_i متغیرهای دودویی (باینری) هستند که در ادامه تعریف شده‌اند.

محدودیت بودجه[1]

برای آنکه مجموع دارایی‌ها در پرتفوی برابر کل بودجه‌ی در دسترس باشد، این محدودیت به‌شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۱۳ بیان می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad \text{(۱۳ رابطه‌ی)}$$

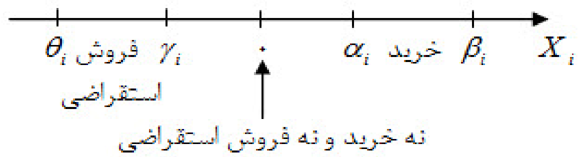
محدودیت حداکثر فروش استقراضی[2]

چنانچه بخواهیم به‌اندازه بودجه‌ی در دسترس، حداکثر فروش استقراضی در تمامی دارایی‌ها داشته باشیم، محدودیت رابطه‌ی شماره‌ی ۱۴ به مدل تحمیل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{N} |X_i| \leq 2 \qquad \text{(۱۴ رابطه‌ی)}$$

محدودیت سقف و کف[3]

در شرایطی که هم خرید و هم فروش استقراضی داشته باشیم و در هر دو حالت، محدودیت سقف و کف در میزان دارایی مورد نظر وجود داشته باشد (برای جلوگیری از تجاوز بیش از حد نسبت دارایی و کاهش هزینه‌های معاملاتی در نسبت‌های کم دارایی)، در هر دو وضعیت خرید و فروش استقراضی، حدود بالا و پایین در نظر گرفته می‌شود که در نمودار شماره‌ی ۲ آورده شده است:



نمودار ۲. نمای شماتیک وضعیت خرید و فروش استقراضی

1. Budget Constraint
2. Maximum Short Selling Constraint
3. Floor & Ceiling Constraint

همان‌طور که در نمودار شماره‌ی ۲ مشاهده می‌شود، α_{i} و β_{i} به‌ترتیب حدود پایین و بـالا در وضعیت خرید $(0 < \alpha_i < \beta_{\mathrm{i}})$ و θ_{i} و γ_{i}، به‌ترتیـب حـدود پـایین و بـالا در وضـعیت فـروش استقراضی $(\theta_i < \gamma_i < 0)$ هستند. گفتنی است چنانچه $X_i = 0$ باشد، آنگـاه در مـورد دارایـی i ام ، خریـد و فـروش استقراضـی انجـام نمـی‌دهـیم؛ یعنـی دارایـی i ام در پرتفـوی انتخـابی سرمایه‌گذار وجود نخواهد داشت.

با توجه به موارد بیان شده، برای مدل کردن این محدودیت از دو متغیر باینری استفاده شـده است که به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$k_i \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad \delta_i \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$k_i = \begin{cases} 0 & neither\ Buy\ nor\ Short\ Sell \\ 1 & Buy\ or\ Short\ Sell \end{cases}$$

$$\delta_i \begin{cases} 0 & Short\ Sell \\ 1 & Buy \end{cases}$$

با استفاده از دو متغیر فوق، محدودیت سقف و کف را می‌توان به‌شکل رابطه‌ی شـماره‌ی ۱۵ مدل کرد:

$$\left(\alpha_i \delta_i + \theta_i \left(1-\delta_i\right)\right) k_i \le X_i \le \left(\beta_i \delta_i + \gamma_i \left(1-\delta_i\right)\right) k_i \qquad \text{رابطه‌ی ۱۵}$$

محدودیت تعداد دارایی در پرتفوی[1]

این محدودیت برای مدیریت هرچه بهتر دارایی‌های موجود در پرتفوی به مدل تحمیل می‌شود و از آنجاکه در مدل موردنظر، هدف مدیریت هر دو مورد، دارایـی‌هـای خریـداری شـده و فـروش استقراضی شده است و همچنین با توجه به آنکه متغیر باینری k_i زمانی برابر ۱ است که دارایـی iام یا خریداری یا فروش استقراضی می‌شـود، بنـابراین ایـن محـدودیت مـی‌توانـد بـه یکـی از شکل‌هایی که در رابطه‌ی شماره‌ی ۱۶ آمده، بیان شود:

1. Cardinality Constraint

$$\sum_{i=1}^{N} k_i \leq K \quad or \sum_{i=1}^{N} k_i = K \quad or \; K_{min} \leq \sum_{i=1}^{N} k_i \leq K_{max}$$ رابطه‌ی ۱۶)

در مدل پیشنهادی، تنها حد بالا برای تعداد دارایی‌های پرتفـوی در نظـر گرفتـه شـده اسـت ($K_{\max} = 10$).

محدودیت حفظ تنوع‌بخشی پرتفوی[1]

برای حفظ تنوع‌بخشی پرتفوی، فرض می‌شود که تمامی نسبت دارایی‌های موجود در پرتفوی، در فاصله‌ی [۱ , ۱-] قرار دارند، یعنی: $X_i \in [-1, 1]$.

$$-1 \leq X_i \leq 1$$ رابطه‌ی ۱۷)

با توجه به موارد ذکر شده، مدل پیشنهادی نهایی به‌شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۱۸ خواهد بود:

$$Min\sigma_P^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j \, \sigma_{ij}$$ رابطه‌ی ۱۸)

Subject to:

$$E\left(R_P\right) = \sum_{i=1}^{N} \left[k_i X_i \left(\overline{R_i} - \left(1 - \delta_i\right) h_i R_f \right) \right] \geq R_e$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left| X_i \right| \leq 2$$

$$\left(\alpha_i \delta_i + \theta_i \left(1 - \delta_i\right)\right) k_i \leq X_i \leq \left(\beta_i \delta_i + \gamma_i \left(1 - \delta_i\right)\right) k_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} k_i \leq 10$$

$$-1 \leq X_i \leq 1$$

یافته‌های پژوهش (مطالعه‌ی موردی)

از آنجاکه در حال حاضر امکان فروش استقراضی در بازار بورس ایران وجود ندارد، بنـابراین بـازار بورس نیویورک، به‌عنوان جامعه‌ی آماری برای آزمون مدل پیشنهادی مورد استفاده قـرار گرفتـه

1. Diversification Constraint

است. با استفاده از داده‌های به‌دست آمده،[1] برای ۱۵ سهم در یک دوره‌ی زمانی ۵۸۶ روزه (۲۰۰۹/۱/۱ الی ۲۰۱۱/۲/۱)، اطلاعات بازده، واریانس و کوواریانس بین سهام استخراج شده که در جدول شماره‌ی ۱ ارائه شده است. گفتنی است که پارامترهای حدود بالا و پایین در وضعیت‌های خرید و فروش استقراضی، به‌دلخواه برای تمامی سهام انتخابی، یکسان در نظر گرفته شده است $(\theta_i, \gamma_i, \alpha_i, \beta_i)$.

جدول ۱. اطلاعات قیمت ۱۵ سهم برگزیده از تاریخ ۲۰۰۹/۱/۱ تا ۲۰۱۱/۲/۱

نام شرکت	نام اختصاری	میانگین بازده (درصد)	واریانس				
آمازون	AMZN	۰/۲۵۳	۷/۰۱۰	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
اَپل	AAPL	۰/۲۴۸	۳/۴۰۲	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
دِل	DELL	۰/۰۹۲	۵/۹۳۳	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
ای‌بِی	EBAY	۰/۱۷۳	۵/۴۰۰	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
گوگل	GOOG	۰/۱۰۶	۳/۱۷۱	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
اِچ‌پی	HP	۰/۲۱۱	۸/۹۷۸	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
اینتل	INTC	۰/۰۹۰	۳/۶۹۷	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
آی‌بی‌اِم	IBM	۰/۱۲۴	۱/۹۹۹	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
مایکروسافت	MSFT	۰/۰۵۸	۳/۳۵۳	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
نوکیا	NOK	-۰/۰۵۵	۷/۶۸۱	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
پاناسونیک	PC	۰/۰۱۳	۳/۵۷۲	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
سونی	SNE	۰/۰۷۱	۵/۴۵۷	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
تویوتا	TM	۰/۰۴۸	۳/۲۶۴	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
یاهو	YHOO	۰/۰۸۰	۴/۹۳۱	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶
مک‌دونالد	MCD	۰/۰۴۲	۱/۳۸۲	۰/۷	۰/۱	۰	-۰/۶

نرخ بازده بدون ریسک (Rf)، سالانه ۴ درصد در نظر گرفته شده است که نرخ روزانه‌ی مربوطه، به‌صورت مرکب پیوسته برابر ۰/۰۱۱ خواهد بود.

مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی (INLP)[2] ارائه شده با استفاده از نرم‌افزار برنامه‌ریزی ریاضی لینگو (۱۱)[3] برای شش مقدار مختلف پارامتر h_i، حل شده که نتایج در جدول شماره‌ی ۲

۱. داده‌ها از تارنمای http://www.finance.yahoo.com به‌دست آمده است.

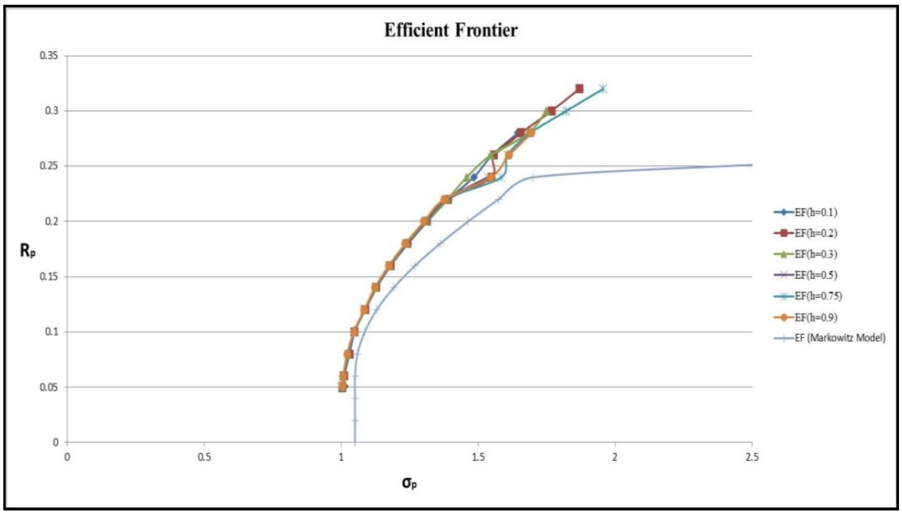
2. Integer Non Linear Programming

3. Lingo Version 11

ارائه شده است. همچنین مرز کارای سرمایه‌گذاری حاصل نیز در نمـودار شـماره‌ی ۳ نشـان داده شده است.

جدول۲. ریسک (انحراف معیار) و بازده پرتفوی بهینه به‌ازای مقادیر مختلف حداقل بازده انتظاری پرتفوی و پارامتر h_i

		0		**۰/۰۲**		**۰/۰٤**		**۰/۰٦**		**۰/۰۸**	
	۰/۱۰	۰/۰۴۹	۱/۰۰۴	۰/۰۴۹	۱/۰۰۴	۰/۰۵۱	۱/۰۱۲	۰/۰۶۰	۱/۰۱۰	۰/۰۸۰	۱/۰۲۶
	۰/۲۰	۰/۰۴۹	۱/۰۰۴	۰/۰۴۹	۱/۰۰۴	۰/۰۴۹	۱/۰۰۴	۰/۰۶۰	۱/۰۱۰	۰/۰۸۰	۱/۰۳۰
	۰/۳۰	۰/۰۴۹	۱/۰۰۴	۰/۰۵۰	۱/۰۰۴	۰/۰۵۰	۱/۰۰۴	۰/۰۶۰	۱/۰۰۸	۰/۰۸۰	۱/۰۲۵
	۰/۵۰	۰/۰۵۰	۱/۰۰۴	۰/۰۵۰	۱/۰۰۴	۰/۰۵۰	۱/۰۰۴	۰/۰۶۰	۱/۰۰۸	۰/۰۸۰	۱/۰۲۹
	۰/۷۵	۰/۰۵۱	۱/۰۰۴	۰/۰۵۱	۱/۰۰۴	۰/۰۵۱	۱/۰۰۴	۰/۰۶۰	۱/۰۰۷	۰/۰۸۰	۱/۰۲۶
	۰/۹۰	۰/۰۵۲	۱/۰۰۴	۰/۰۵۲	۱/۰۰۴	۰/۰۵۲	۱/۰۰۴	۰/۰۶۰	۱/۰۰۶	۰/۰۸۰	۱/۰۲۱
		۰/۱۰		**۰/۱۲**		**۰/۱٤**		**۰/۱٦**		**۰/۱۸**	
	۰/۱۰	۰/۱۰۰	۱/۰۴۹	۰/۱۲۰	۱/۰۸۸	۰/۱۴۰	۱/۱۲۸	۰/۱۶۰	۱/۱۸۰	۰/۱۸۰	۱/۲۴۴
	۰/۲۰	۰/۱۰۰	۱/۰۴۸	۰/۱۲۰	۱/۰۸۸	۰/۱۴۰	۱/۱۲۸	۰/۱۶۰	۱/۱۸۰	۰/۱۸۰	۱/۲۴۳
	۰/۳۰	۰/۱۰۰	۱/۰۴۹	۰/۱۲۰	۱/۰۸۷	۰/۱۴۰	۱/۱۲۷	۰/۱۶۰	۱/۱۷۹	۰/۱۸۰	۱/۲۴۲
	۰/۵۰	۰/۱۰۰	۱/۰۴۸	۰/۱۲۰	۱/۰۸۵	۰/۱۴۰	۱/۱۲۶	۰/۱۶۰	۱/۱۷۷	۰/۱۸۰	۱/۲۴۰
	۰/۷۵	۰/۱۰۰	۱/۰۴۶	۰/۱۲۰	۱/۰۸۴	۰/۱۴۰	۱/۱۲۴	۰/۱۶۰	۱/۱۷۵	۰/۱۸۰	۱/۲۳۶
	۰/۹۰	۰/۱۰۰	۱/۰۴۵	۰/۱۲۰	۱/۰۸۴	۰/۱۴۰	۱/۱۲۳	۰/۱۶۰	۱/۱۷۳	۰/۱۸۰	۱/۲۳۴
		۰/۲۰		**۰/۲۲**		**۰/۲٤**		**...**			
	۰/۱۰	۰/۲۰۰	۱/۳۱۴	۰/۲۲۰	۱/۳۹۱	۰/۲۴۰	۱/۴۸۳	...	...		
	۰/۲۰	۰/۲۰۰	۱/۳۱۳	۰/۲۲۰	۱/۳۸۹	۰/۲۴۰	۱/۵۴۹	...	...		
	۰/۳۰	۰/۲۰۰	۱/۳۱۱	۰/۲۲۰	۱/۳۸۷	۰/۲۴۰	۱/۴۵۸	...	...		
	۰/۵۰	۰/۲۰۰	۱/۳۰۸	۰/۲۲۰	۱/۳۸۴	۰/۲۴۰	۱/۵۳۴	...	...		
	۰/۷۵	۰/۲۰۰	۱/۳۰۵	۰/۲۲۰	۱/۳۷۹	۰/۲۴۰	۱/۵۸۵	...	...		
	۰/۹۰	۰/۲۰۰	۱/۳۰۳	۰/۲۲۰	۱/۳۷۶	۰/۲۴۰	۱/۵۴۷	...	...		



نمودار ۳. مرز کارای سرمایه‌گذاری به‌ازای مقادیر مختلف h_i

همان‌طورکه در جدول شماره‌ی ۲ مشاهده می‌شود، از چپ به راست با افـزایش مقـدار بـازده انتظاری پرتفوی (R_e)، ریسک پرتفوی (انحراف معیار پرتفوی σ_p) نیز به‌ازای تمامی مقـادیر h_i افزایش می‌یابد (ارتباط مستقیم). همچنین برای مقادیر پایین (R_e)، با افزایش مقـدار h_i از بـالا به پایین، مقادیر ریسک پرتفوی بدون تغییر باقی‌مانده اسـت، در حـالی‌کـه بـرای مقـادیر بـالاتر (R_e)، روند نزولی را طی می‌کند (ارتباط معکوس). برای مقایسه‌ی مرز کارای مدل پیشـنهادی و مرز کارای مدل پایه‌ای مارکویتز، بار دیگر نمودار شماره‌ی ۳ را در نظر بگیریـد. همـان‌طـور کـه انتظار می‌رفت، مرز کارای مدل پیشنهادی بالاتر از مرز کارای مدل مارکویتز قـرار گرفتـه اسـت. علت این امر آن است که در مدل پایه‌ای مارکویتز، حداکثر مقدار بازده پرتفوی برابر بـا بـالاترین بازده دارایی‌های در دسترس (آمازون با میانگین بازده ۰/۲۵۳) خواهد بود، در حـالی‌کـه در مـدل پیشنهادی با توجه به مجاز شمردن فروش استقراضی، می‌توان انتظار دست‌یابی به بازده پرتفـوی بیشتر از مقدار ۰/۲۵۳ را نیز داشت.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله یک مدل تک‌هدفـه (کمینـه‌سـازی واریـانس پرتفـوی) پیشـنهاد شـده اسـت، کـه تصمیم‌گیری در خصوص سه وضعیت (خرید، فروش استقراضی، نه خرید و نه فروش) هر دارایی را برای سرمایه‌گذار به‌دنبال دارد. افزون‌بر محدودیت‌های مدل اولیه‌ی مارکویتز (بازده و بودجـه)،

برخی محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه (حداکثر میزان فروش استقراضی، حداکثر تعداد دارایی در پرتفوی، حد بالا و پایین هر دارایی، حفظ تنوع‌بخشی پرتفوی) نیز به مدل تحمیل شده است. برای ایجاد انگیزش در خصوص انجام فروش استقراضی و جلوگیری از تضرر قرض‌دهنده‌ی دارایی، پارامتر h_i جهت پوشش ریسک، اعمال شده است. با حل مدل، مشخص شد که ریسک و بازده پرتفوی ارتباط مستقیم داشته، در حالی‌که ریسک و مقدار h_i ارتباط معکوس دارند. همچنین در مدل پیشنهادی با توجه به مجاز بودن فروش استقراضی، می‌توان انتظار دست‌یابی به بازده پرتفوی بیشتر از بالاترین بازده دارایی‌های در دسترس را نیز داشت.

با به‌وجود آمدن سازوکار فروش استقراضی در بازار بورس اوراق بهادار، مدل ارائه‌شده قابلیت استفاده برای انتخاب پرتفوی بهینه برای سرمایه‌گذاران داخلی را نیز خواهد داشت.

با توجه به مطالب بیان‌شده، برخی زمینه‌ها برای مطالعات بعدی به شرح زیر پیشنهاد شده است:

- استفاده از سایر محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه برای توسعه‌ی مدل؛
- استفاده از سایر مقیاس‌های ریسک، همچون نیم‌واریانس (SVAR)، ارزش در معرض ریسک (VaR) و... به‌عنوان تابع هدف مدل پیشنهادی؛
- حل مدل با درنظرگیری چند هدف؛
- استفاده از تئوری فازی در مدل‌سازی مدل پیشنهادی.

منابع

1. Anagnostopoulos, K.P. and Mamanis, G. (2010). A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables. *Computers & Operations Research*, 37: 1285–1297.

2. Armãnanzas, R. and Lozano, J.A. (2005). A multiobjective approach to the portfolio optimization problem. *In Proceedings of the 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 1388–1395.

3. Black, F. (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, 45 (3): 444-455.

4. Chiam, S. C., Tan, K. C., and Al Mamum, A. (2008). Evolutionary multi-objective portfolio optimization in practical context. *International Journal of Automation and Computing*, 5 (1): 67-80.

5. Crama, Y., and Schyns, M. (2003). Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *European Journal of Operational Research*, 150: 546-571.

6. Di Gaspero, L., Di Tollo, G., Roli, A. and Schaerf, A. (2007). Hybrid local search for constrained financial portfolio selection problems. *In Proceedings of Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems*, 44–58.

7. Hicks, J.R. (1935). A suggestion for simplifying the theory of money. *Economics*, 2: 1–19.

8. Jacobs, B., Levy, K.N. and Markowitz, H. (2005). Portfolio optimization with factors, scenarios and realistic short positions. *Operations Research*, 53 (4): 586-599.

9. Jacobs, B., Levy, K.N. and Markowitz, H. (2006). Trimability and fast optimization of long-short portfolios. *Financial Analysts Journal*, 62 (2): 36-46.

10. Kellerer, H. and Maringer, D. (2003). Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm. *OR Spectrum*, 25 (4): 481-495.

11. Maringer, D. (2005). *Portfolio Management with Heuristic Optimization*. Springer Verlag.

12. Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7 (1): 77-91.

13. Rolland, E. (1997). A tabu search method for constrained real number search: applications to portfolio selection. *Technical report, Department of Accounting and Management Information Systems*, Ohio State University, Columbus.U.S.A.

14. Schaerf, A. (2002). Local search techniques for constrained portfolio selection problems. *Computational Economics*, 20 (3): 177–190.

15. Soleimani, H., Golmakani, H. and Salimi, M.H. (2009). Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36: 5058-5063.

16. Yu, L., Wang, S., and Lai, K.K. (2008). Neural network-based mean–variance–skewness model for portfolio selection. *Computers & Operations Research*, 35 (1): 34-46.