تحقیقات مالی
دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
دورهٔ ۱۶، شمارهٔ ۲
پاییز و زمستان ۱۳۹۳
ص. ۲۱۸- ۲۰۱

انتخاب سبد سهام با استفاده از بهینه‌سازی استوار

آذین ابریشمی[۱]، رضا یوسفی زنوز[۲]

چکیده: مقالهٔ حاضر به انتخاب سبد پرتفوی با استفاده از بهینه‌سازی استوار پرداخته است. از آنجا که پارامترهای مسئلهٔ انتخاب سبد سهام، یعنی قیمت سهم، سود تقسیمی، بازده و... هر سهم را به‌دلیل نوسان‌های بازار و قیمت‌ها نمی‌توان ثابت در نظر گرفت، باید از روشی بهره برد که عدم قطعیت داده‌ها لحاظ شود. بهینه‌سازی استوار راه‌حلی عملی برای مسائلی به‌شمار می‌رود که در آنها مقدار و توزیع پارامترها نامعلوم است. روش‌های گوناگونی برای حل مسائل با بهره‌مندی از بهینه‌سازی استوار تعریف شده است. تعریف مجموعهٔ عدم قطعیت بازده دارایی‌ها از طریق مجموعهٔ عدم قطعیت چندوجهی و قابلیت تنظیم تعداد و وزن دارایی‌های سبد، استواری جواب بهینه و سطح حفاظت را می‌توان از مزیت‌های روشی دانست که در این مقاله به‌کار رفته است. داده‌های پیاده‌شده برای مثال کاربردی این مقاله، بازده‌های ماهانهٔ ۳۰ سهم است که به‌طور تصادفی از بین ۷۸ سهم برگزیدهٔ بورس اوراق بهادار تهران، از فروردین ۸۵ تا اسفند ۹۰ انتخاب شده است.

واژه‌های کلیدی: انتخاب سبد پرتفوی، بهینه‌سازی استوار، عدم قطعیت.

۱. کارشناس‌ارشد مدیریت بازرگانی، گرایش مالی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین، ایران
۲. استادیار گروه مدیریت، دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۰۷/۰۶
تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۳/۰۴/۱۷
نویسندهٔ مسئول مقاله: آذین ابریشمی
E-mail: azin.abrishami@gmail.com

مقدمه

مفهوم تشکیل سبد پرتفوی، از نگرش شهودی سنتی مبنی بر اینکه «همهٔ تخم مرغ‌ها را نباید در یک سبد گذاشت» به نگرش بهینه‌سازی ریاضی تحول پیدا کرد (پارکر، ۱۳۸۰). سرمایه‌گذارانی که پرتفوی را می‌پذیرند و به‌کار می‌برند، بر این باورند که حریف بازار نیستند؛ بنابراین انواع گوناگونی از اوراق بهادار را نگهداری می‌کنند تا بازده‌شان با متوسط بازده بازار برابر شود. به‌طور کلی اوراق بهادار ریسک دارند و مسئلهٔ اصلی هر سرمایه‌گذار، تعیین مجموعهٔ اوراق بهاداری است که مطلوبیت آن حداکثر است. این مسئله، معادل انتخاب پرتفوی بهینه از مجموعهٔ پرتفوی‌های ممکن است که مسئلهٔ انتخاب پرتفوی نامیده می‌شود (راعی و پویان‌فر، ۱۳۸۹). مسئلهٔ انتخاب پرتفوی یا به بیانی، مسئلهٔ انتخاب سهام و تعیین مقدار سرمایه‌گذاری در سهام، از مسائل مهم تصمیم‌گیری است که به‌شدت از عدم قطعیت تأثیر می‌پذیرد.

عدم قطعیت در این مسئله ناشی از تخمین مقادیر قیمت (نرخ سود) و همچنین نرخ بازده سهام است. این مسئله را نخستین‌بار مارکویتز (۱۹۵۲) به‌صورت برنامه‌ریزی ریاضی مدل‌سازی کرد و نتیجهٔ کار وی جایزهٔ نوبل در علم اقتصاد بود که در سال ۱۹۹۰ به‌طور مشترک با شارپ دریافت کردند. مارکویتز در سال ۱۹۵۲ مدل میانگین ـ واریانسی را برای انتخاب پرتفوی ارائه کرد. از برجسته‌ترین نکات مدل مارکویتز توجه به ریسک سرمایه‌گذاری، بر اساس ریسک مجموعهٔ سرمایه‌گذاری است، نه فقط براساس ریسک یک سهم. مارکویتز مدلش را بر مبنای تعیین مجموعهٔ پرتفوی کارا، یعنی پرتفوی‌ای با کمترین واریانس بازده میان تمام پرتفوی‌ها با بازده یکسان یا بیشترین بازده مورد انتظار میان تمام آنهایی که واریانس یکسان دارند، تعریف کرد. ضعف اساسی مدل مارکویتز این است که تخمین دقیقی برای بازده سهام و واریانس (ریسک) آنها در نظر گرفته شده است. مدل وی فقط به بهینه‌کردن پرتفوی می‌پردازد و چگونگی برآوردها را ارائه نمی‌دهد و احتمال برآوردهای نادقیق را در نظر نمی‌گیرد؛ در حالی‌که بازده دارایی‌ها تغییر می‌کند و تغییر کوچکی در بازده و ریسک، اثر شایان توجهی را بر ترکیب میانگین ـ واریانس می‌گذارد. در این مدل، ریسک سرمایه‌گذاری از طریق واریانس قیمت (نرخ بازده) سهام اندازه‌گیری می‌شود. خطای ناشی از تخمین مقادیر میانگین و واریانس، سبب کاهش کیفیت توزیع سرمایه می‌شود. بدین ترتیب جذابیت مدل مارکویتز میان افراد حرفه‌ای فعال در بازار سهام و سرمایه‌گذاری کاهش یافت (سیفی، حنفی‌زاده و نوابی، ۱۳۸۳).

برای برطرف‌کردن ضعف روش مارکویتز، میشایود (۱۹۹۸) روش نمونه‌گیری مجدد از مقادیر میانگین و ماتریس کوواریانس سود را ارائه کرد. در این روش، نمونه‌گیری‌ها از داخل ناحیهٔ اطمینانی، حول مقادیر اسمی (میانگین و کوواریانس) برداشت می‌شوند. این روش برای هر مقدار

نمونه، مسئلهٔ میانگین ـ واریانس را حل می‌کند و پس از آن به یکپارچه‌سازی جواب‌ها می‌پردازد (میشایود، ۱۹۹۸). مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی مبتنی بر سناریو نیز، برای در نظرگرفتن عدم قطعیت در پارامترهای بازار و تولید جواب‌های پایدار در برابر عدم قطعیت پیشنهاد شدند. این مدل‌ها تمام مقادیر ممکن از پارامترهای غیرقطعی بازار را در قالب سناریو به مدل وارد می‌کنند. کارهای ملوی، واندربی و زیمبا (۱۹۹۸) نمونهٔ پیشرفته‌ای از این روش‌ها است، اما این رویکرد نیز با مشکلات و ضعف‌های زیر روبه‌روست:

- محدودیت‌های مسئله به‌صورت نرم یا انعطاف‌پذیر در نظر گرفته می‌شوند؛ چرا که تحلیل‌گر اهدافش را برای برآورده‌شدن در محدودیت‌ها قرار می‌دهد و اجازه می‌دهد که این محدودیت‌ها با پرداخت جریمه در تابع هدف نقض شوند؛
- اطلاعات به‌دست‌آمده از پارامترهای غیرقطعی به‌صورت سناریوهای گسسته است (همان نمونه‌گیری‌های صورت‌گرفته) و هرچه تعداد سناریوهایی که در تولید جواب بهینه دخالت داده می‌شوند بیشتر باشد، بر استواری جواب نسبت به عدم قطعیت افزوده می‌شود، اما این موضوع ابعاد مسئله را از لحاظ محاسباتی افزایش می‌دهد، به‌خصوص هنگامی که تعداد سهام زیادی مطالعه شود؛
- هیچ تضمینی وجود ندارد که سناریوهای تولیدشده بتوانند توزیع آماری قیمت‌های غیرقطعی سهام را پوشش دهند (سیفی و همکاران، ۱۳۸۳).

یکی دیگر از رویکردهای جدید برخورد با عدم قطعیت، بهینه‌سازی استوار است. در این روش اطلاعات از پارامترهای غیرقطعی در داخل ناحیه‌ای پیوسته و محدب انتخاب می‌شوند و مدل برنامه‌ریزی ریاضی محدب غیرقطعی به مدل برنامه‌ریزی مخروطی قطعی که در اصطلاح آن را جایگزین (همتای) استوار می‌نامند، تبدیل می‌شود. جواب به‌دست‌آمده از مدل جایگزین استوار به ازای تمام مقادیر ممکن از پارامترهای غیرقطعی، خواص موجه‌بودن و بهینگی خود را حفظ می‌کند. بنابراین کیفیت این‌گونه جواب‌ها برای برخورد با عوامل غیرقطعی دنیای واقعی بهتر است (نمیروسکی و بن تال، ۱۹۹۹).

این مقاله به شرح مدلی برای بهینه‌کردن سبد سهام از طریق بهینه‌سازی استوار می‌پردازد و ضمن مدل‌سازی پارامترهای عدم قطعیت با در نظرگرفتن ساختارهای متفاوت برای مجموعهٔ عدم قطعیت، پرتفوی به‌دست‌آمده ارزیابی می‌شود. ایدهٔ اصلی در ارزیابی عملکرد، مقایسهٔ بازده پرتفوی با بازده یک یا چند پرتفوی مناسب یا مقایسهٔ بازده کلی و نهایی پرتفوی به‌دست‌آمده از پرتفولیوی استوار با بازده نهایی پرتفولیوی روش‌های تضمین‌شدهٔ دیگر است.

پیشینهٔ پژوهش

پژوهش‌های بسیاری در زمینهٔ پیش‌بینی بازار سهام، بهینه‌سازی و انتخاب پرتفولیو، صورت گرفته است که در اینجا فقط به پژوهش‌هایی اشاره می‌شود که با بهره‌مندی از مدل‌های بهینه‌سازی استوار اجرا شده است.

نمیروسکی و ال‌قائوئی در سال ۱۹۹۷، برای تعریف محدودهٔ بازده‌ها از مجموعه‌های عدم قطعیت بیضی‌شکل استفاده کردند که اغلب مدل‌های بعدی، اساس کارشان را برپایهٔ این مدل بنا کردند. به‌منظور ارزیابی، نتیجهٔ به‌دست‌آمده با بدترین عملکرد از مدل‌های غیراستوار، مانند مدل میانگین ـ واریانس مقایسه می‌شد.

بوود و لوبو در سال ۲۰۰۰ ،چندین روش متفاوت برای مدل‌سازی مجموعهٔ عدم قطعیت برای بردار بازده‌های مورد انتظار و ماتریس‌های کوواریانس ابداع کردند، هر مدل استوار تا اندازه‌ای از طریق روش‌های نقطهٔ داخلی، راه حل مسئله بود، ولی نتایج آنها بیشتر بر نحوهٔ روش و عملکرد، نه استوارسازی پرتفوی بهینهٔ آن تمرکز داشت.

گلدفارب و آینگار در سال ۲۰۰۳، میانگین ـ واریانس، حداکثر نرخ شارپ و مسئلهٔ مقدار سطح ریسک را بر اساس رویکرد بهینه‌سازی استوار مدل‌سازی کردند. نتایج آنها نشان داد عملکردهای بدترین وضعیت مدل استوار، کمابیش ۲۰۰ درصد بهتر از مدل‌های غیراستوار است. از این رو مدل‌های استوار در برابر داده‌های نامعلوم، به مقاومت تمایل بیشتری دارند.

توتونچی و کوئینگ در سال ۲۰۰۴، با در نظر گرفتن عناصر بردار میانگین و ماتریس کوواریانس در ناحیه‌های فاصله‌ای، مسئلهٔ انتخاب سهام را با مسئلهٔ برنامه‌ریزی غیرخطی مدل‌سازی کردند و برای رسیدن به جوابی استوار، به حل آن پرداختند. نتایج نشان داد در مقایسه با روش‌های قبل، هنگامی که مطابق با مدل میانگین ـ واریانس، بازده نزدیک به بازده مورد انتظار است، نتیجهٔ کارآمد بیشتری به‌دست می‌آید، ولی مسئلهٔ تعریف‌شده برای مجموعه‌های دارایی کوچک‌تر، مناسب‌تر است.

سیم و برتسیماس (۲۰۰۴) بر خلاف اغلب پژوهشگران در این زمینه، بهینه‌سازی در وضعیت عدم اطمینان را با مدل‌هایی بررسی کردند که در آنها پارامترها با مجموعه‌های چندوجهی، نه مجموعه‌های بیضوی مدل‌بندی شده‌اند.

استاپز و سریا در سال ۲۰۰۶، مدلی ارائه کردند که تفاوت بین تأثیر برآوردی و واقعی عوامل بر بیشینه‌کردن بازده پرتفوی را کمینه می‌کند. نتایج نشان داد حداقل‌کردن این فاصله، برآوردها را به مرزهای درست نزدیک‌تر می‌کند و مدل استوار، اغلب بازده‌های واقعی‌تری را نتیجه می‌دهد.

دیدگاه وزابال و همکاراش در مدل‌سازی عدم قطعیت، کمی متفاوت‌تر بود. آنها در زمینهٔ انتخاب پرتفولیوی استوار مسئله‌ای ساختند که در آن مجموعهٔ اطمینان، احتمال توزیع بازده دارایی‌ها را شرح می‌داد. همچنین، آنها روابط بین ریسک، استوارسازی و بازده پرتفوی را ارزیابی کردند. نتایج آنها نشان داد وقتی استواری افزایش می‌یابد، از ریسک و بازده پرتفوی کاسته‌شده و پرتفوی متنوع‌تر می‌شود (وزابال و پی. فلاگ، ۲۰۰۷).

بین استاگ در سال ۲۰۰۷، از روش‌های بهینه‌سازی استوار برای وزن‌دهی مساوی به همهٔ مقدارهای ممکن پارامترهای نامعلوم، انتقاد کرد؛ به‌ویژه در حوزهٔ مجموعه‌های عدم قطعیت که فرض تلقی می‌شود. برای این منظور مجموعه‌های عدم قطعیت را با دادن وزن‌های بیشتر به داده‌هایی تعریف کرد که قابلیت تحقق بیشتری دارند و به معرفی الگوریتم برش الگو برای حل مدل‌های استوار با مجموعهٔ عدم قطعیت‌های جدید پرداخت.

برتسیماس و پاچاموناوا (۲۰۰۸) مدل بهینه‌سازی پرتفوی چنددوره‌ای را بر پایهٔ دستاوردهای بن تال و نمیروسکی پیشنهاد دادند، اما در این مدل از مجموعه‌های عدم قطعیت چندوجهی به جای بیضی‌شکل استفاده شد. آنها نحوهٔ عملکرد محاسباتی مدل‌های استوار خطی‌شان را با مدل میانگین ـ واریانس تک‌دوره‌ای با استفاده از شبیه‌سازی بازده‌های آیندهٔ سه دارایی مقایسه کردند. نتایج مقایسه نشان داد رویکرد چنددوره‌ای استوار باید به‌مثابهٔ گزینهٔ جایگزین برای مدل‌های میانگین واریانس تک‌دوره‌ای در نظر گرفته شود.

گرگری، داومن و میترا (۲۰۱۱)، پژوهشی دربارهٔ جریمه‌ای که برای استوارسازی هزینه می‌شود با صرف‌نظر کمی از تابع هدف، اجرا کردند.

حنفی‌زاده و همکارانش (۱۳۸۳)، مسئلهٔ انتخاب سهام را با استفاده از رویکرد مدل یکپارچه در بهینه‌سازی استوار، معرفی کردند. در مدل یکپارچه، ناحیهٔ عدم قطعیت با بدنهٔ نرم مناسبی برآورد می‌شود و مدل با در نظرگرفتن پارامترهای مد نظر سرمایه‌گذار، اجازهٔ تولید نسخهٔ متفاوتی از مدل یکپارچه را متناسب با شرایط مسئله به مدل‌ساز می‌دهد و مدل‌ساز با توجه به پارامترهای غیرقطعی و در نظرگرفتن مطلوبیت سرمایه‌گذار، مدل و سرمایه‌گذاری مناسب را پیشنهاد می‌دهد.

روش‌شناسی پژوهش

تصمیم‌گیری استوار در وضعیت عدم قطعیت

در بهینه‌سازی استوار، به بهینه‌سازی در هنگام رخ‌دادن بدترین اتفاق‌ها پرداخته می‌شود که ممکن است به تابع هدف مینیمم‌کردن ماکزیمم (min - max) منجر شود. در این رویکرد

به‌دنبال جواب‌های نزدیک به بهینه‌ای هستیم که با احتمال زیادی موجه باشند (حنفی‌زاده و همکاران، ۱۳۸۳).

فرم کلی همتای استوار هر برنامه‌ریزی خطی در وضعیت عدم قطعیت به‌شکل رابطهٔ ۱ است.

$$Max[Min(C^T X)]$$ رابطهٔ ۱)

$$\text{Subject to Ax} \leq b\,, (A, b.c) \in U$$

جواب‌های شدنی استوار و جواب بهینه برای رابطهٔ ۱، همان جواب بهینهٔ استوار است (بن تال و نمیروسکی، ۱۹۹۸).

در چارچوب بهینه‌سازی استوار، مقدار واقعی $\bar{a}_i$ که پارامتری نامعین است، به‌کمک رابطهٔ ۲ تعیین می‌شود.

$$a_i = \bar{a}_i + \hat{a}_i \eta_i$$ رابطهٔ ۲)

در رابطهٔ ۲، $\bar{a}_i$: برآورد آماری مقدار مورد انتظار a_i (به‌منزلهٔ برآورد نقطه‌ای)؛ $\hat{a}_i$: بیشترین فاصله‌ای که a_i ممکن است از برآورد نقطه‌ای $\bar{a}_i$ منحرف شود؛ η_i : متغیر تصادفی محدود که به‌طور متقارن دربازهٔ [۱ , ۱−] توزیع شده است. ماهیت پارامترهای نامعین مشخص می‌کند η_i چگونه در بازه‌ای تولید می‌شود. برای مثال η_i ممکن است ماهیتی تصادفی، غیریکنواخت و... داشته باشد. با توجه به اینکه $\bar{a}_i$ در بازهٔ $[\bar{a}_i - \hat{a}_i\,, \bar{a}_i + \hat{a}_i]$ قرار دارد، مجموعه‌های عدم قطعیت بیضوی به‌صورت رابطهٔ ۳ هستند (بن تال و نمیروسکی ۱۹۹۸).

$$u^{\Omega} = \left\{ a \in R^n : \sum \frac{(a_i - \bar{a}_i)^2}{\hat{a}_i^{\,2}} \leq \Omega^2, ||Ln||_\infty \leq 1 \right\}$$ رابطهٔ ۳)

در رابطهٔ ۳، Ω پارامتری تعریف‌شدهٔ کاربراست و رابطهٔ جایگزینی بین استواری و بهینگی را تعریف می‌کند. وقتی Ω افزایش می‌یابد، ناحیهٔ تعریف بیضوی مجموعهٔ عدم قطعیت نیز افزایش می‌یابد و از کران بالای احتمال نقض محدودیت[1]، کاسته می‌شود (مدل استوارتر می‌شود). بنابراین، اندازهٔ مجموعه‌های عدم قطعیت (یا بیضوی) و احتمال نقض محدودیت، به‌وسیلهٔ پارامتر Ω مشخص می‌شود که بستگی به ترجیح ریسک کاربر دارد.

سیم و برتسیماس (۲۰۰۴) عدم قطعیت را با بهره‌مندی از مجموعه‌های عدم قطعیت چندوجهی مدل‌بندی کردند.

---

1. $e^{-\frac{\Omega^2}{2}}$

رابطهٔ ۴)
$$U = \left\{a: |\, a_{\mathrm{i}} - \bar{a}_i| \le \hat{a}_i, \left|\left|\mathrm{Ln}\right|\right|_\infty \le 1, \left|\left|\mathrm{Ln}\right|\right|_1 \le \Gamma\right\}$$

Γ پارامتر تعریف‌شدهٔ کاربر است که استواری مدل را تنظیم می‌کند و حداکثر تعداد پارامترهای عدم قطعیت که می‌توانند بدترین مقدار را بگیرند، در نظر گرفته می‌شود. با تغییر در Γ، تعداد بازه‌هایی که چندوجهی را تعریف می‌کنند، تغییر می‌یابد. بنابراین ساختار U تغییر می‌کند و استواری مدل تنظیم می‌شود. سیم و برتسیماس مقدار احتمال نقض محدودیت از بالا را مشخص کردند[1]. بنابراین، وقتی Γ افزایش یابد، جواب استوارتر می‌شود. در مقایسه با پارامتر Ω که ،بن تال و نمیروسکی (۱۹۹۷) معرفی کردند، Γ تأثیری در اندازهٔ مجموعهٔ عدم قطعیت نشان داده‌شده (به‌ترتیب) در رابطه‌های ۳ و ۴، ندارد.

در این پژوهش با معرفی معیار c برای اندازه‌گیری، a_{i} به‌صورت رابطهٔ ۵ بار دیگر بازنویسی می‌شود.

رابطهٔ ۵)
$$a_i = \bar{a}_i + c\hat{a}_i\eta_i$$

در این حالت، به‌منظور تشخیص بین انحراف معیار $(\hat{a}_i)$ و عامل اندازهٔ آن (c)، c را از $\hat{a}_i$ خارج کردیم.

در رابطهٔ ۵، $\hat{a}_i$ چگونگی انحراف a_{i} از برآورد نقطه‌ای $\bar{a}_i$ و c نشان‌دهندهٔ مقدار این انحراف است. بنابراین a_{i} در بازهٔ $[\bar{a}_i - c\hat{a}_i\, , \bar{a}_i + c\hat{a}_i]$ قرار می‌گیرد. برای مثال اگر تشخیص داده شود توزیع a_{i} با تعریف $\hat{a}_i$ به عنوان به‌منزلهٔ انحراف معیار a_{i} بهتر بیان می‌شود، پس c تعداد انحراف معیارهایی را نشان می‌دهد که a_{i} می‌تواند از $\bar{a}_i$ منحرف شود. بنابراین a_{i} در بازهٔ $[\bar{a}_i - c\hat{a}_i\, , \bar{a}_i + c\hat{a}_i]$ قرار می‌گیرد.

همتای استوار خطی در بهینه‌سازی پرتفولیو

مسئلهٔ بهینه‌سازی پرتفولیوی اولیه در قالب رابطهٔ ۶ تعریف شده است.

رابطهٔ ۶)
$$\begin{aligned} &\mathrm{Max} \sum_i w_i r_i \\ &S.t \sum_i w_i = 1 \\ &w_i \ge 0 \ \ \forall i \end{aligned}$$

---

1. $e^{\frac{-\Gamma^{2}}{2|J|}}$ کراندار

از آنجاکه بازده دارایی‌ها، یعنی r_i پارامترهای نامعینی هستند، اطلاعات تاریخی مـی‌توانـد در برآورد میانهٔ لگاریتمی بازده دارایی i استفاده شود و متعاقب آن در برآورد نقطه‌ای $\bar{r}_i$. برگرفتـه از برتسیماس و تیل (۲۰۰۶)، متغیر تصادفی جدید η_i، انحراف پارامتر r_i از $\bar{r}_i$ را اندازه می‌گیرد کـه مقدار آن در بازهٔ [۱,۱-] است (رابطهٔ ۷).

$$\eta_i = \left(\frac{r_i - \bar{r}_i}{\hat{r}_i}\right) \qquad \text{رابطهٔ ۷)}$$

به بیان دیگر، r_i به‌صورت رابطهٔ ۸ تعریف می‌شود.

$$r_i = \bar{r}_i + \hat{r}_i \eta_i \qquad \text{رابطهٔ ۸)}$$

اگر $|J|$ تعداد پارامترهای نامعین r_i باشد، مطابق مدل سویستر (۱۹۷۳)و بن تال و نمیروسکی (۱۹۹۸) داریم:

$$\sum_i \frac{|r_i - \bar{r}_i|}{\hat{r}_i} = |J| \qquad \text{رابطهٔ ۹)}$$

یا

$$\sum_i |\eta_i| = |J| \qquad \text{رابطهٔ ۱۰)}$$

برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) این شرایط را با تعریف پارامتر جدید Γ (سـطح حفاظـت) تسـهیل کرد؛ به این شکل که Γ تعداد پارامترهای نامعینی در نظر گرفته می‌شود کـه بـدترین مقدارشـان $\bar{r}_i - \hat{r}_i$ را می‌گیرند. بنابراین $\sum_i |\eta_i| \leq \Gamma$ به‌طوری که $\Gamma \in [0, |J|\}]$. با توجه به تعریـف r_i در رابطهٔ ۸ مسئلهٔ بهینه‌سازی پرتفولیو را می‌توان به‌صورت رابطهٔ ۱۱ بازنویسی کرد.

رابطهٔ ۱۱)

$$\underset{w_i}{\text{Max}}\left(\sum_i \bar{r}_i w_i + \underset{\eta_i}{\text{Min}} \sum_i \hat{r}_i\, \eta_i w_i\right) \equiv \underset{w_i}{\text{Max}}\left(\sum_i \bar{r}_i w_i - \underset{\eta_i}{\text{Max}} \sum_i \hat{r}_i\, \eta_i w_i\right)$$

$$S.t. \sum_i w_i = 1 \;, S.t. \sum_i w_i = 1 \;, \qquad \sum_i |\eta_i| \leq \Gamma \,, \sum_i |\eta_i| \leq \Gamma \,,$$

$$w_i \geq 0 \,, -1 \leq \eta_i \leq 1, \;\; \forall i \qquad\qquad w_i \geq 0 \,, 0 \leq \eta_i \leq 1, \qquad \forall i$$

براساس روش برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) با استفاده از روابط دوگان، قسمت مـاکزیمم‌سـازی داخلی مسئلهٔ محدودیت تصادفی، به‌شکل زیر رابطهٔ ۱۲ درمی‌آید.

رابطهٔ ۱۲)

$$\underset{\mathrm{p,q_i}}{\mathrm{Min}}\, \Gamma \mathrm{p} + \sum_i q_i$$
$$S.t. p + q_i \geq \hat{r}_i w_i \,, \forall i$$
$$p \geq 0,$$
$$q_i \geq 0, \ \ \forall i$$

با جایگزین کردن این نتیجه، همتای استوار را می‌توان به‌دست آورد (رابطهٔ ۱۳).

رابطهٔ ۱۳)

$$\underset{w_i}{\mathrm{Max}}\left(\sum_i \bar{r}_i w_i - \underset{p,q_i}{\mathrm{Min}}\left(\Gamma \mathrm{p} + \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{q_i}\right)\right) \equiv \underset{w_i}{\mathrm{Max}} \sum_i \bar{r}_i w_i - \Gamma p - \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{q_i}$$
$$S.t. \ \ \sum_i w_i = 1 \quad , \qquad\qquad S.t. \ \ \sum_i w_i = 1 \quad ,$$
$$p + q_i \geq \hat{r}_i w_i \,, \quad \forall i \qquad\qquad p + q_i \geq \hat{r}_i w_i \,, \quad \forall i$$
$$p \geq 0 p \geq 0$$
$$w_i, q_i \geq 0 \ , \quad \forall i \qquad\qquad w_i, q_i \geq 0 \ , \quad \forall i$$

شرح همتای استوار

همتای استوار هر مسئلهٔ بهینه‌سازی در موقعیت عدم قطعیت، به‌شکل مدل min - max یا max - min (حداکثر حداقل یا حداقل حداکثر) است که هدف آن، بهینه‌کردن عملکرد بدترین حالت است. شرط مدل‌های سویستر (۱۹۷۳) و بن تال و نمیروسکی (۱۹۹۸) این بود که هریک از محدودیت‌ها برای تمام پارامترهای عدم قطعیت تعریف‌شده، با مجموعهٔ متقارن کراندار (مجموعهٔ عدم قطعیت) شدنی است. به بیان دیگر، مدل آنها از طریق گرفتن بدترین مقدار توسط هر یک از پارامترهای عدم قطعیت، بهینه می‌شود.

برتسیماس و سیم در سال ۲۰۰۴ مدلی را بر مبنای این فرض معرفی کردند که Γ تعداد از پارامترهای نامعین (عدم قطعیت)، نه تمام آنها، بدترین مقدار را می‌گیرند. با پیاده‌سازی این فرض و با استفاده از تعریف r_i یادشده در رابطهٔ ۸، رابطهٔ ۶ را در نظر می‌گیریم. از این رو، به‌دنبال پرتفولیویی با بزرگ‌ترین مقدار بدترین بازده با دارایی‌هایی هستیم که Γ تعداد از آنها دارای بازده‌های نامعین است.

رابطهٔ ۱۴)

$$Max\left[Min\left(\sum_i \bar{r}_i w_i - \sum_{t\in\Gamma} \hat{r}_i w_i\right)\right] \equiv Max \ \sum_i \bar{r}_i w_i - Min\left(Max \sum_{t\in\Gamma} \hat{r}_t w_t\right)$$

$$S.t. \sum_i w_i = 1 \,, \qquad S.t. \sum_i w_i = 1 \,,$$

به‌طوری که رابطهٔ ۱۵ برقرار باشد.

$$I = \{i | 1 \le i \le N\}, \quad T \subseteq I, \quad |T| = \Gamma \qquad \text{(رابطهٔ ۱۵)}$$

در رابطهٔ ۱۵، T زیرمجموعه‌ای از Γ دارایی است کـه بـدترین مقـدار را مـی‌گیـرد $\bar{r}_i - \hat{r}_i$ و $t \in \Gamma$؛ .عبارت min-max در تابع هدف به‌دنبال حداقل‌کردن بدترین مقدار است؛ عبارت max داخلی به‌دنبال انتخاب Γ دارایی با بزرگ‌ترین $\hat{r}_i w_i$ به‌مثابهٔ زیرمجموعـهٔ T اسـت، در حـالی‌کـه min خارجی به‌دنبال دست‌کم حداقل‌کردن مجموع با توجه به w_i، اسـت. چنانچـه فـرض شـود مقدار $\hat{r}_t w_t$ برای تمام tها یکسان و مساوی p است، عبارت $\sum_{t \in \Gamma} \hat{r}_t w_t$ مساوی با Γp خواهـد شد.

حال با احتمال اینکه برای بعضی از tها، $pt = \hat{r}twt$ و $p_t \neq p$ است؛ به‌وضوح در وضعیت بهینگی، عبارت $\sum_{t \in \Gamma} \hat{r}_t w_t$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر خواهد شد. بنابراین اختلاف $p_t - p$، بـرای تمام tها، به اضافه‌شدن Γp نیاز دارد و مقدار $Min(Max \sum_{t \in \Gamma} \hat{r}_t w_t)$ به‌صورت رابطهٔ ۱۶ تغییر می‌کند.

$$Min\left[\Gamma_p + \sum_t (p_t - p)\right], \forall t = \{t | (p_t - p) \ge 0\} \qquad \text{(رابطهٔ ۱۶)}$$

با تعریف پارامتر جدید q_t اختلاف $p_t - p$ را می‌توان به بزرگ‌تر یا مساوی صفر محدود کرد (رابطهٔ ۱۷).

$$q_t = \max(0, p_t - p) \qquad \text{(رابطهٔ ۱۷)}$$

پیش از این اشاره شـد عبـارت min – max در تـابع هـدف بـه‌دنبـال حـداکثرکردن مقـدار $\sum_{t \in \Gamma} \hat{r}_t w_t$ با انتخاب Γامین $\hat{r}_i w_i$ بزرگ به‌مثابهٔ زیرمجموعهٔ T است که مقدار $\sum_t q_t$ بزرگ‌تر از صفر می‌شود؛ تنها و تنها اگر $p_t > p$. بنابراین p به ازای تمام tهـا بـه نشـانهٔ کوچـک‌تـرین $\hat{r}_i w_i$ انتخاب می‌شود؛ به این معنا که Γامین $\hat{r}_i w_i$ بزرگ به ازای تمام iها است (گرگری، داومن و میترا، ۲۰۱۱).

رابطهٔ ۱۸، مدل نهایی بهینه‌سازی پرتفولیو را نشان می‌دهد.

$$Max \sum_i \bar{r}_i w_i - \Gamma p - \sum_i q_i \qquad \text{(رابطهٔ ۱۸)}$$

$$s.t.\sum_{i} w_i \le 1$$

$$q_i = Max(0, \sum_{i} \hat{r}_i w_i)$$

بر اساس تعریف مدل نهایی مسئلۀ بهینه‌سازی استوار خطی برتسیماس و سیم (۲۰۰۴)، مدل حداکثرسازی بازده مورد انتظار هر پرتفولیو به‌صورت رابطۀ ۱۹ است.

$$Maximize \sum_{i} \bar{r}_i w_i - \Gamma p - \sum_{i} q_i$$ رابطۀ ۱۹)

$$Subjectto \sum_{i} w_i = 1,$$

$$p + q_i \ge c\hat{r}_i w_i, \forall i$$

یافته‌های پژوهش

مجموعۀ داده‌ها

در پژوهش پیش رو، بازده ماهانۀ سهام ۳۰ شرکت حاضر در بورس اوراق بهادار تهران در بازۀ زمانی ۸۵/۰۱/۰۱ تا ۹۰/۱۲/۲۹ مجموعۀ داده‌ها را شکل داده است. این شرکت‌ها به‌طور تصادفی از میان شرکت‌های فعالی انتخاب شده‌اند که در بازۀ زمانی یادشده شرایط زیر را داشتند:

- سهام آنها در بورس اوراق بهادار معامله شود؛
- اطلاعات مالی آنها برای دورۀ پنج‌سالۀ مد نظر در دسترس باشد؛
- توقف معاملاتی سهام آنها بیش از سه ماه نباشد؛
- سال مالی آنها به اسفندماه منتهی شود.

پیاده‌سازی داده‌ها در مدل

برای هر یک از ۳۰ سهم، بازده ماهانه‌ای به‌کمک نرم‌افزار ره‌آورد نوین از فروردین ۸۵ تا اسفند ۹۰ جمع‌آوری شد و پس از آن در محیط اکسل، $\bar{r}_i$ کل سهم (در اینجا میانگین بازده‌های ماهانه) و نیز $\hat{r}_i$ (در اینجا انحراف معیار) از رابطۀ ۲۰ به‌دست آمد.

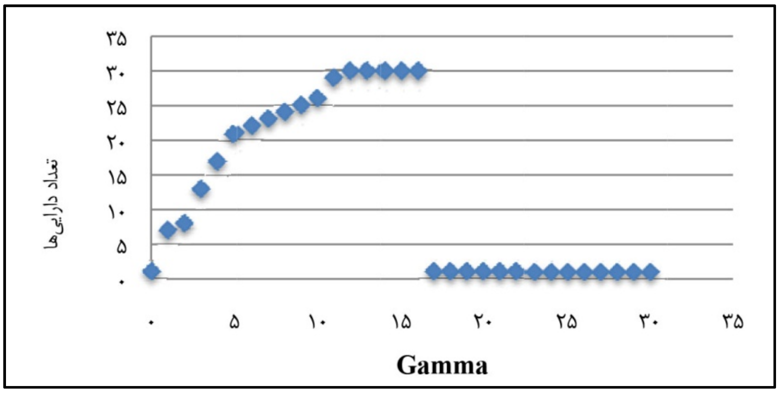
$$\hat{r}_i = \sqrt{\frac{\sum(r_i - \bar{r}_i)^2}{n-1}}$$ رابطۀ ۲۰)

بدین ترتیب به ازای هر دارایی i، میانگین بازده‌های ماهانه ($\bar{r}_i$) برای ۵ سال متوالی و انحراف معیار ($\hat{r}_i$) محاسبه می‌شود و با در نظر گرفتن c دلخواه ($c = ۳, ۱, ۲$) و $۰ \le \Gamma \le N$ داده‌های

ورودی کامل می‌شود. به‌کمک نرم‌افزاری به نام Cplex که قابلیت بهینه‌سازی مدل‌های ریاضی را دارد، پس از واردکردن کدهای برنامه بـه زبـان AMPL بـه‌منظـور اجـرای برنامـه، داده‌هـای گردآوری‌شده $(\Gamma, c, \hat{r}_{\mathrm{i}}, \bar{r}_{\mathrm{i}})$ در پنجرهٔ مخصوص داده‌هـای ورودی منتقـل مـی‌شـوند. بـا اجـرای برنامه، w_{i}ها یعنی وزن‌های هر دارایی i، به شکلی محاسبه می‌شود که بازده مورد انتظار با شرط عدم اطمینان بازده‌ها، با حداکثرشدن عبارت $\sum_i \bar{r}_{\mathrm{i}} \mathrm{w}_{\mathrm{i}} - \Gamma \mathrm{p} - \sum_i \mathrm{q}_i$ حداکثر شود.

متنوع سازی

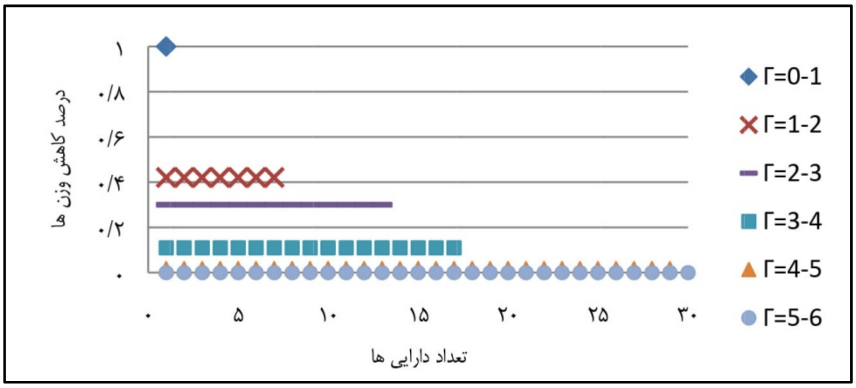
در شکل ۱ تعداد دارایی‌های انتخاب‌شده برای تنوع پرتفولیو در مقـدارهای سـطح حفاظـت (Γ) متفاوت ترسیم شده است. N+۱ پرتفولیوی متوالی برای مقدارهای صحیح Γ از ۰ تـا N در نظـر گرفته شده است. وقتی $\Gamma =$۰ است، پرتفولیو شامل یک دارایی می‌شود که بـه‌وضـوح بیشـترین بازده مسئله بدون هیچ استواری است. با افزایش Γ، تعداد دارایی‌ها نیز افـزایش مـی‌یابـد تـا بـه بیشترین تعداد دارایی دست یابد که در اغلب وضعیت‌ها همـان N اسـت. از ایـن نقطـه بـه بعـد، ترکیب ساختار پرتفولیوها برای مقادیر متوالی Γ ثابت می‌ماند تا دوباره در نقطـهٔ $\Gamma = \Gamma_{drop}$ (در نمودار $\Gamma_{drop} =$ ۱٫۱۶) با اضافه‌شدن یک دارایی دیگر، تعداد دارایی‌ها کم می‌شـود و بـه یـک دارایی سقوط می‌کند. پس از آن نیز برای $\Gamma \geq \Gamma_{drop}$ پرتفولیوی بهینه شامل دارایـی بـا بـازده قابل تنظیم همراه با ریسک $\bar{r}_i - c\hat{r}_i$ است. این رفتـار در شـکل ۱ بـرای داده‌هـایی بـا۳۰ =N دارایی از بورس اوراق بهادار تهران نشان داده شده است. نتایج به‌دست‌آمده کمابیش با یافته‌های توتونچی و کوئینگ (۲۰۰۴) متفاوت است؛ آنها بر مجموعهٔ کوچکی از دسته‌های دارایـی و تنـوع کمتری تمرکز داشتند.



شکل ۱. نمودار متنوع‌سازی

انتخاب و وزن دارایی‌ها

در شکل ۲، $\bar{r}_i$ها در طول محور x به حالت نزولی قرار گرفته‌اند (میانگین لگاریتمی بازده). دارایی ۱ بزرگ‌ترین $\bar{r}_i$ و دارایی ۳۰ کوچک‌ترین $\bar{r}_i$ را دارد. شکل ۲ نشان‌دهندهٔ دو هدف است: اول؛ نشان‌دادن دارایی‌هایی که در هر پرتفولیو وجود دارند، وقتی که $\Gamma = ۰$ تا $\Gamma = ۷$ است و دوم؛ نشان‌دادن اینکه وزن هر دارایی وقتی Γ به $\Gamma+۱$ افزایش می‌یابد، چگونه تغییر می‌کند؟



شکل ۲. درصد کاهش وزن‌ها

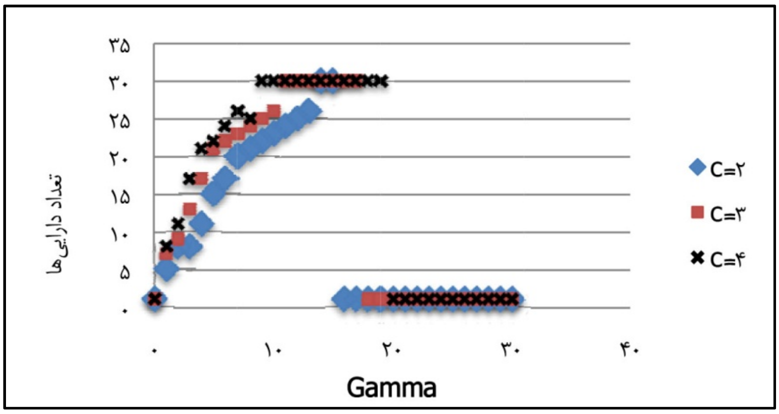
بار دیگر، N+۱ پرتفولیوی متوالی برای مقدارهای صحیح Γ، از ۰ تا N در نظر گرفته شده است. وقتی Γ افزایش می‌یابد، بر تعداد دارایی‌های نیز افزوده می‌شود تا به بیشترین تعداد خود برسد (در این وضعیت یعنی N). به‌علاوه، اول دارایی‌هایی با بیشترین $\bar{r}_i$، انتخاب می‌شوند. برای مثال، وقتی Γ صفر باشد، پرتفولیوهایی شامل دارایی‌هایی با بزرگ‌ترین $\bar{r}_i$ انتخاب می‌شوند، وقتی Γ برابر با ۱ است، ۷ دارایی با بزرگ‌ترین $\bar{r}_i$ها انتخاب می‌شود و وقتی Γ برابر با ۲ است، ۶ دارایی دیگر نیز به پرتفولیو اضافه می‌شود (۶ دارایی به اضافهٔ دارایی‌هایی با $\bar{r}_i$ بزرگ‌تر قبلی) و وقتی Γ برابر با ۳ باشد، ۴ دارایی دیگر نیز به پرتفولیو اضافه می‌شود تا در $\Gamma = N$ به N دارایی می‌رسد.

رابطهٔ مهمی بین وزن‌های هر دارایی در پرتفولیوها وقتی Γ به $\Gamma + ۱$ تغییر می‌کند، برقرار می‌شود. اگر $NumA_{\Gamma}$، تعداد دارایی‌های انتخاب‌شده در پرتفولیویی برای $\Gamma = ۰, \ldots, N$ باشد و اگر $NumA_{\Gamma+۱} > NumA_{\Gamma}$، از وزن هر دارایی در Γ به یک نسبت (درصد) کاسته می‌شود تا به $\Gamma + ۱$ برسد.

برای مثال؛ وزن هر ۷ دارایی در $\Gamma =۱$ به یک نسبت، حدود ۴۲ درصد کاهش پیدا می‌کند؛ هنگامی که $\Gamma = ۲$ می‌شود و ۶ دارایی به ۷ دارایی قبل نیز اضافه می‌شود و به همین ترتیب،

وقتی که ۲ = Γ به ۳ = Γ یا ۳ = Γ به ۴ = Γ و ۵ = Γ تغییر می‌یابد، همین روند ادامه دارد، اما وقتی Γ از ۵ به ۶ افزایش می‌یابد، درصد کاهش دارایی‌ها بسیار کم خواهد شد؛ زیرا تمام N دارایی‌ها در شرایط یکسان باقی می‌مانند. همان‌طور که پیش از این بیان شد، دارایی‌هایی با بیشترین $\bar{r}_i$، اولین دارایی‌های انتخاب‌شده برای اضافه‌شدن به پرتفولیوی استوارند.

در شکل ۳، تعداد دارایی‌های انتخاب‌شده در هر یک از Γ های مختلف، برای مدل‌هایی با cهای مختلف (c = ۲, ۳, ۴) ترسیم شده است. با افزایش c از ۲ تا ۴، تعداد دارایی‌های انتخاب‌شده سریع‌تر به N همگرا می‌شود (در کمترین مقدار Γ) و پرتفولیو با N دارایی منجر به بیشترین مقدار ۱- Γ_{drop} می‌شود. بنابراین، وقتی c افزایش می‌یابد، پرتفولیوی بیشتری شامل N دارایی خواهد شد. نتایج نشان می‌دهد هنگامی که دارایی‌ها با مجموعهٔ عدم قطعیت‌های کوچک‌تری تعریف شود، انواع گسترده‌ای از پرتفولیوها به‌دست می‌آید، به‌خصوص برای مقدارهای کمتری از Γ. علاوه‌بر این برای تمام مقادیر c، همهٔ پرتفولیوهای شامل ۳۰ دارایی به‌طور دقیق ترکیب مشابهی دارند.

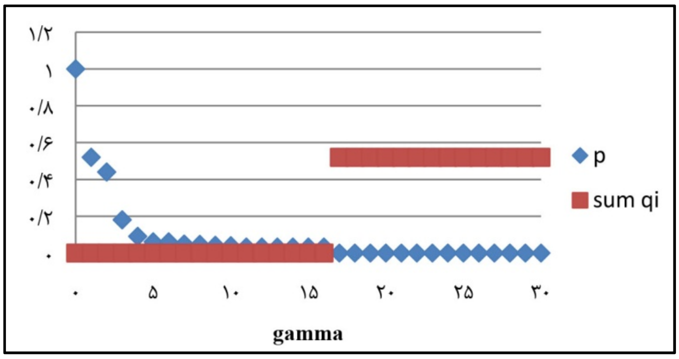


شکل ۳. تعداد دارایی‌های انتخاب‌شده برای پرتفولیوهایی با گاماهای مختلف

رابطهٔ بین p و q_iها

همان‌طور که در بخش‌های قبل تعریف شد، p به عنوان Γامین $\hat{r}_i w_i$ بزرگ به ازای تمام i ها انتخاب شد. نتایج تجربی و عملی نشان داد نه‌تنها P به‌مثابهٔ Γامین $\hat{r}_i w_i$ بزرگ است، به ازای تمام iها $\hat{r}_i w_i = P$ است؛ درحالی‌که $w_i \geq$ ۰ و ۱- $\Gamma \leq \Gamma_{drop}$. در نتیجه به ازای تمام iها $q_i =$ ۰. هنگامی که $\Gamma \geq \Gamma_{drop}$، هر پرتفولیو تنها شامل یک دارایی است، بنابراین ۰ = P و $q_i = \hat{r}_i w_i$. ارتباط بین P و q_i در شکل ۴ نشان داده شده است. البته p و $\sum_i q_i$ به ازای تمام

Γها ترسیم شده‌اند نه برای $p_i(\hat{r}_i w_i)$ و q_i به ازای تمام iها؛ زیرا $\hat{r}_i w_i = p$ (برای تمام iها، اگر $W_i \geq ۰$) و هنگامی که $\sum_i q_i \neq ۰$، q_i برای دارایی با بزرگ‌ترین بازده تنظیم‌شدنی با ریسک تنها q_i ای است که غیر صفر می‌باشد، بنابراین $\sum_i q_i$ برای دارایی با بیشترین بدترین مقدار بازده برابر با $\hat{r}_i w_i$ است.



شکل ٤. رابطهٔ بین p و qها

مقایسهٔ مرز کارآمدی با مدل میانگین ــ واریانس

مارکویتز در سال ۱۹۵۲، روش شایان توجهی ارائه داد که ریسک را در بهینه‌سازی پرتفولیو در نظر می‌گیرد و مدل میانگین ـ واریانس (E-V) نامیده می‌شود. در این مدل، پرتفولیویی به‌دست می‌آید که با کمترین (حداقل) ریسک به بازده مشخص مورد انتظاری دست می‌یابد، یا با ریسک مشخص تعریف‌شده‌ای به حداکثر مقدار بازده می‌رسد (رابطهٔ ۲۱).

رابطهٔ (۲۱)

$$Min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} W_i \, W_j \, \sigma_{ij}$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{N} W_i \, \mu_i \geq TargetReturn$$

$$\sum_{i=1}^{N} W_i = 1$$

$$\forall \; i = 1, \dots, N$$

در رابطهٔ ۲۱، Target Return بازده مورد انتظار دارایی i؛ σ_{ij} کواریانس دارایی ij و w_i وزن سرمایه‌گذاری‌شده در دارایی i است. بر اساس مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز یا مدل MPT (تئوری نوین پرتفوی)، سرمایه‌گذار علاقه‌مند به حداکثرکردن بازده مورد انتظارش، در حال

حداقل‌کردن ریسک است. البته این دو هدف متضاد با هم به‌طور کامل و همزمان تحقق نمی‌یابد؛ زیرا حداکثرکردن بازده مورد انتظار مستلزم حداکثرکردن ریسک و حداقل‌کردن ریسک مستلزم حداقل‌کردن بازده است، بنابراین مارکویتز به تنوع‌سازی رجوع کرد.

به‌طور خلاصه در این مدل، هدف حداکثرکردن بازده مورد انتظار با توجه به حد بالای ریسک مشخص‌شده است. اگر E بازده مورد انتظار و V واریانس پرتفولیو باشد، S مجموعهٔ تمام ترکیب‌های پرتفوی ممکن را نشان می‌دهد.

مدل مارکویتز فرض می‌کند هر سرمایه‌گذار فقط زیرمجموعهٔ پرتفولیوهای کارا، یعنی یکی از ترکیب‌های پرتفوی مجموعهٔ S را در نظر می‌گیرد، پرتفولیوی «کارا» پرتفولیویی است که برای واریانس مشخص یا حداقل واریانس، به بیشترین بازده مورد انتظار دست یابد. نتیجهٔ این مدل فقط پرتفولیو کارا است. هنگامی که به‌ازای تمامی مقادیر Target Return (بازده مورد انتظار) ممکن جواب داشته باشد، مرز کارایی تولید می‌کند که سرمایه‌گذار می‌تواند با توجه به ترجیح ریسک و بازده‌اش، پرتفولیوی بهینه را انتخاب کند.

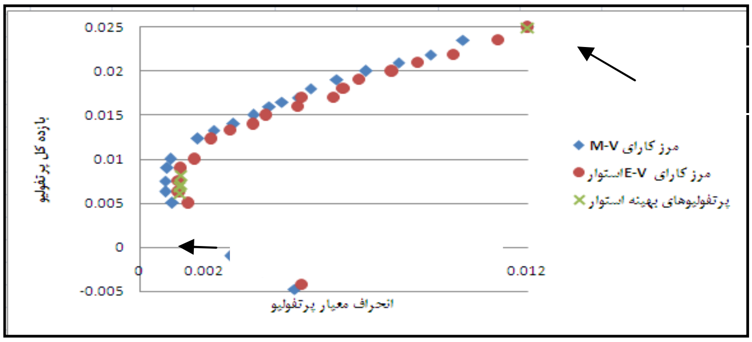
اگر محدودیت زیر در شرایط مدل استوار قرار داده شود، مرز کارای استوار به‌دست می‌آید که در آن بازده مورد انتظار (Target Return) کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین میانگین لگاریتمی بازده را می‌گیرد.

$$\sum_{i=1}^{N} W_i\,\mu_i = TargetReturn$$ رابطهٔ ۲۲)

در شکل ۵ مرز کارای E-V استوار (نقاط دایره) همراه با مرز کارای E-V مارکویتز (نقاط مربع شکل) رسم شده است. برای هر Γ از ۰ تا N مدل استوار برای هر مقدار بازده هدف، بهینه شده است. مانند مدل مارکویتز، سرمایه‌گذار علاقه‌مند به زیرمجموعه‌ای از نقاط کاراست. بنابراین برای هر بازده هدف، پرتفولیو مطلوب پرتفولیویی با کوچک‌ترین واریانس به‌ازای تمام Γهاست (نقاط دایره در نمودار).

مرز کارای E-V استوار برای مقایسه با مدل مارکویتز مفید است، اما برای مدل استوار بهترین نمود نیست؛ زیرا بسیاری از پرتفولیوهای کارا، بدون محدودیت بازده هدف تولید نمی‌شوند. بدون این محدودیت، پرتفولیوهای بهینهٔ استوار برای تمام Γها، در بازهٔ کوچکی از واریانس‌های پرتفولیو و بازده کلی پرتفولیو جمع می‌شوند (علامت‌های × نمودار). همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌شود، پرتفولیوهای بهینه وقتی $\Gamma = ۰$ است، شامل دارایی‌هایی با بیشترین

میانگین لگاریتمی بازده می‌شود و وقتی $\Gamma = \Gamma_{\text{drop}}, \dots, N$ است، شامل دارایی‌هایی با بیشترین ریسک قابل تنظیم $\bar{r}_i - c\hat{r}_i$ خواهد شد.



شکل ۵. نمودار مرز کارا

نتیجه‌گیری

مشکلی که در دنیای واقعی در زمینهٔ تصمیم‌گیری ترکیب بهینه، از جمله ترکیب بهینهٔ سبد سهام وجود دارد، غیرقطعی‌بودن داده‌های ورودی است. اثر این عدم قطعیت روی جواب موجه به اندازه‌ای است که تنها درصد کوچکی از تغییرات در داده‌های ورودی، ممکن است احتمال غیرموجه‌شدن جواب را به‌شدت افزایش دهد. بنابراین باید رویکردی اتخاذ شود که عدم قطعیت در داده‌ها به‌صورت غیرقطعی در نظر گرفته شود. رویکرد به‌کاررفته در مدل‌سازی استوار سبد سهام در این مقاله، الگوریتم پیشنهادشدهٔ برتسمیس و سیم (۲۰۰۴) است که از مزیت‌های بسیاری چون خطی‌بودن مدل پایدار و امکان تنظیم سطوح حفاظت با توجه به میزان عدم قطعیت برخوردار است. تصمیم‌گیرنده می‌تواند با توجه به حساسیت مسئله و عدم قطعیت، به‌گونه‌ای سطوح حفاظت را تنظیم کند که به جواب موجه پایدار مناسب دست پیدا کند. به‌کمک این مدل، ابتدا دارایی‌ها بر اساس سیر نزولی میانگین بازده‌ها انتخاب شدند و سپس به دارایی‌هایی که انحراف معیار (ریسک) کمتری دارند، وزن بیشتری داده شد. همچنین پرتفولیوهای استوار هم از نظر تعداد دارایی‌ها و هم از نظر وزن، متنوع شدند که این ویژگی مطلوبی محسوب می‌شود، به‌خصوص اینکه پرتفولیوها با مقادیر سطح حفاظت بیشتر، متنوع‌تر می‌شوند و میزان استواری آنها را بیشتر می‌توان تضمین کرد. علاوه‌براین، برای مدل یادشده، مجموعهٔ عدم قطعیت با بازه بزرگ‌تر، استواری بیشتری را نتیجه می‌دهد.

References

Ben-Tal, A. & Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research,* 23(4): 769-805.

Bertsimas, D. & Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operation research,* 52 (1): 35-53.

Bertsimas, D. & Thiele, A. (2006). Robust and data-driven optimization: modern decision making under uncertainty. *Tutorials in Operations Research, INFORMS*, 95-122.

Goldfarb, D. & Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics of Operations Research,* 1(28): 1 – 38.

Gregory, C., Darby-Dowman, K. & Mitra, G. (2011). Robust optimization and portfolio selection. *European Journal of Operation Research*, 212(2): 417-428.

Heibati, F. & Naserifard, A. (2008). Portfolio Selection and Optimization Using Stochastic Multi-Purpose Model. *Boors*, 76: 26-41. (*in Persian*)

Kim, S. & Boyd, S. (2007). *Robust Efficient Frontier Analysis with a Separable Uncertainty Model*, [Stanford University], available: http://www.stanford. edu /~boyd/papers/pdf/rob_ef_sep.pdf.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance,* 7(1): 77-91.

Pflug, G., Wozabal, D. (2007). Ambiguity in portfolio selection. *Quantitative Finance & Accounting,* (4): 435-442.

Michaud, R.O. (1989). The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal? *Financial Analysts Journal*, 45(1): 435-442.

Parker, J. (2001). *Portfolio Management*. Tehran: Iran Training and Industrial Researches center. (*in Persian*)

Raei, R., Pouyanfar, A. (2010). *Advanced Investment Management*. Tehran: Samt. (*in Persian*)

Seyfi, A., Hanafizadeh, P. & Navvabi, H. (2004). Integrated Robust Model for Stock Portfolio Selection. *Financial Researches*, 6(17): 71-95. (*in Persian*)

Soyster, A (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, 21(5): 1154-1157.

Tutunci, R.H. & Koenig, M. (2004). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 132: 157-187.