تحقیقات مالی، دوره ۱۰ ، شماره ۲۵، بهار و تابستان ۱۳۸۷، از صفحه ۱۰۹ تا ۱۲۴

محاسبه ارزش در معرض خطر پارامتریک با استفاده از مدل‌های ناهمسانی واریانس شرطی در بورس اوراق بهادار تهران

شاپور محمدی[۱]، رضا راعی[۲]، آرش فیض‌آباد[۳*]

۱. استادیار دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، ایران
۲. استادیار دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، ایران
۳. دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت مالی داتشگاه تهران، ایران

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۷/۶/۲، تاریخ تصویب: ۱۳۸۷/۱۰/۲۱)

چکیده

در این تحقیق عملکرد روش پارامتریک در پیش بینی مقادیر ارزش در معرض خطر در مورد دو پرتفوی متشکل از شرکت‌های بورس اوراق بهادار تهران (پرتفوی متشکل از تمامی شرکت‌ها و پرتفوی متشکل از ۵۰ شرکت با نقدشوندگی بالا) مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، پس از محاسبهٔ مقادیر ارزش در معرض خطر یک روزه و ده روزه با استفاده از برخی مدل‌های خانوادهٔ ARCH بر روی سه توزیع آماری نرمال، t- استیودنت و توزیع خطای تعمیم یافته، نتایج بدست آمده با استفاده از آزمون پس نگر در حجم‌های نمونه‌ای متفاوت، در سطوح اطمینان پایین و بالا مورد مقایسه و تحلیل قرار می‌گیرند. نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که اول این‌که، پیش‌بینی مقادیر ارزش در معرض خطر یک روزه و ده روزه با استفاده از توزیع‌های لپتوکورتیک از دقت و عملکرد بالاتری برخوردار می‌باشند. دوم این‌که، انتخاب حجم‌های نمونه‌ای متفاوت بر تعداد و نتایج مدل‌هایی که ارزش در معرض خطر را به درستی تخمین می‌زنند تأثیرگذار است.

واژگان کلیدی: ارزش در معرض خطر، نوسان شرطی، تابع زیان، آزمون پس نگر
طبقه‌بندی JET: C22، C52، C53، G15.

* نویسنده مسئول: Email: afaizabad@gmail.com

۱. مقدمه

نوسان یکی از مهم‌ترین جنبه‌های توسعه بازارهای مالی است و نقشی اساسی را در مدیریت پرتفوی، قیمت‌گذاری اختیار معاملات و قوانین حاکم بر بازار ایفا می‌کند. در دو دهۀ اخیر، اکثر مطالعات اقتصاد دانان مالی بر روی مدل‌سازی و تخمین نوسان سری‌های زمانی اقتصادی متمرکز بوده است. علت این امر عمدتاً به‌واسطۀ آن است که از نوسان به عنوان معیاری جهت محاسبۀ ریسک استفاده می‌شود. در انتخاب یک پرتفوی مناسب نیز یکی از معیارهای مورد توجه سرمایه‌گذاران، حداقل ساختن ریسک است. با توجه به این‌که پیش بینی‌نوسان قیمت یک دارایی مقدمۀ ارزیابی ریسک سرمایه‌گذاری به‌شمار می‌رود، از این‌رو مدل‌سازی صحیح واریانس حائز اهمیت است. افزون بر این، در سال‌های اخیر زیان‌های تجاری مؤسسات مالی در کنار رشد چشم‌گیر فعالیت‌های تجاری سبب شده است تا قانون‌گذاران و کمیته‌های نظارت، روش‌هایی را به‌منظور کمّی ساختن ریسک ارایه کنند. به‌طور کلی مؤسسات مالی و اقتصادی با چهار نوع ریسک اعتباری، عملیاتی، نقدینگی و بازار مواجه هستند. ریسک اعتباری به ناتوانی طرف تجاری در ایفای تعهدات خود مربوط می‌شود. ریسک عملیاتی، ریسک ناشی از بروز خطا یا تقلب در تسویه قراردادها و مبادله اسناد است. ریسک نقدینگی زمانی ایجاد می‌شود که مؤسسه از منابع مالی کافی جهت تأمین نیازهای فوری مالی خود برخوردار نباشد. ریسک بازار از عدم اطمینان آتی موجود درباره‌ی تغییرات قیمت دارایی‌ها در بازار نشأت می‌گیرد. در حال حاضر متداول‌ترین معیار سنجش ریسک بازار روش ارزش در معرض خطر می‌باشد. بنا به تعریف، ارزش در معرض خطر حداکثر زیانی است که ممکن است در یک دوره زمانی معین (معمولا یک روزه) و با در نظر گرفتن یک سطح اطمینان مشخص در پرتفویی از دارائی‌ها رخ دهد. به‌عنوان مثال، وقتی گفته می‌شود که ارزش در معرض خطر یک دارائی در سطح اطمینان ۹۹درصد روزانه ۱۰ میلیون دلار است به این معنا است که از هر ۱۰۰ روزی که مبادلات تجاری در آنها صورت می‌گیرد تنها در یک روز به‌طور متوسط زیانی بالاتر از ۱۰ میلیون دلار خواهیم داشت.

یکی از مزایای ارزش در معرض خطر این است که محاسبۀ ریسک پرتفوی‌هایی متشکل از انواع دارائی‌های مختلف تنها با این روش قابل اندازه‌گیری است. امروزه محاسبه پروژه‌ها در بانک‌ها، مؤسسات بیمه، صندوق‌های سرمایه گذاری و سایر مؤسسات مالی و اعتباری با استفاده از این روش صورت می‌پذیرد. ضمن آن‌که محاسبۀ حد کفایت

سرمایه در بانک‌ها نیز بر اساس این معیار انجام می‌شود. مزیت دیگر این روش، سهولت محاسبه و سادگی مفهوم و تفسیر آن می‌باشد.

به طور کلی روش‌های محاسبهٔ ارزش در معرض خطر عبارتند از: روش‌های پارامتریک، ناپارامتریک (شبیه سازی تاریخی) و روش شبیه سازی مونت کارلو. دو روش اول مبتنی بر داده‌های تاریخی و روش مونت کارلو مبتنی بر تولید داده‌های تصادفی می‌باشد.

هدف از این تحقیق بررسی عملکرد روش پارامتریک (با استفاده از مدل‌های اقتصاد سنجی) در محاسبهٔ مقادیر ارزش در معرض خطر یک روزه و ده روزه در مورد دو پرتفوی متشکل از شرکت‌های عضو بورس اوراق بهادار در دو مقطع زمانی ۵ و ۱۰ ساله می‌باشد.

داده‌های مالی از ویژگی‌هایی برخوردار می‌باشند که از این میان دو ویژگی مهم یعنی نوسانات خوشه ای بازده‌ها و دنباله‌های پهن توزیع احتمال آنها توجه بسیاری از تحلیلگران مالی را به خود معطوف داشته است. پدیدهٔ نوسانات خوشه ای به این موضوع اشاره دارد که نوسان بازده‌ها ثابت نیست و بر حسب زمان تغییر می‌کند. انگل (۱۹۸۲) برای اولین بار مدلی را ارائه نمود که بر اساس آن توانست ناهمسانی واریانس شرطی را مدل سازی نماید[۱۰]. بولرسلو (۱۹۸۶) با بسط مدل انگل، مدل ناهمسانی واریانس شرطی اتورگرسیو تعمیم یافته (GARCH) را معرفی کرد[۴]. پس از آن مدل‌های گوناگونی بر پایهٔ مدل اولیه انگل (مدل ARCH) توسط محققین مختلف ارائه گردیدند که به طور گسترده ای در زمینهٔ تحلیل سری‌های زمانی مالی مورد استفاده قرار گرفتند. آکگیری (۱۹۸۹) در بررسی بازار بورس آمریکا به این نتیجه دست یافت که استفاده از یک مدل GARCH(1,1) عملکرد بالاتری را نسبت به استفاده از روش تجزیه و تحلیل سنتی به همراه خواهد داشت[۱]. کریستیانسن (۱۹۹۹) نشان داد که به منظور ارتقاء کیفیت تخمین ارزش در معرض خطر با استفاده از مدل‌های ARCH می‌توان توزیع t- استیودنت را جایگزین توزیع نرمال نمود [6]. پولاسک و پوجارلیو (۲۰۰۰) ارزش در معرض خطر را برای بازده‌های NASDAQ 100 محاسبه کردند و نشان دادند که انتخاب مدل واریانس شرطی می‌تواند دقت تخمین ارزش در معرض خطر را به میزان قابل توجهی افزایش دهد[۲۳]. نتایج تحقیق روی (۲۰۰۲) نشان می‌دهند که در شرایطی که توزیع بازده اوراق بهادار به شدت دم پهن می‌باشد استفاده از روش پارامتریک که مبتنی بر فرض نرمال بودن توزیع بازده‌ها می‌باشد تخمین نادرستی از ارزش در معرض خطر را ارائه می‌دهد. حال آنکه استفاده از مدل‌های

مرتبه بالاتر GARCH نتایج کارآمدتری را پس از حذف همبستگی سریالی موجود در داده‌ها بدست می‌دهد[۲۴]. برنز (۲۰۰۲) با استفاده از مدل‌های GARCH مقادیر ارزش در معرض خطر را برای داده‌های روزانه شاخص S&P 500 برای ۷۰ سال برآورد نمود. نتایج این تحقیق نشان می‌دهند که تخمین زننده‌های GARCH در مقایسه با سایر مدل‌ها به جهت دقت و همچنین سازگاری سطح احتمال عملکرد بهتری دارند[۵]. گیوت و لارنت (۲۰۰۳a) با استفاده از روش پارامتریک، عملکرد برخی مدل‌های خانوادهٔ ARCH را در محاسبهٔ ارزش در معرض خطر در مورد بازده‌های روزانه برخی شاخص‌های بازار و سهام شرکت‌ها بر روی سه توزیع نرمال، t- استیودنت و t- استیودنت چوله بررسی نمودند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهند که مدل‌های مورد بررسی بر روی توزیع‌های متقارن از عملکرد پایین تری در مقایسه با توزیع‌های نامتقارن که چولگی دنباله‌های راست و چپ را مورد توجه قرار می‌دهند برخوردار می‌باشند[۱۳]. گیوت و لارنت (۲۰۰۳b) عملکرد مدل‌های ریسک متریک، APARCH با توزیع t- استیودنت چوله و ARCH با توزیع t- استیودنت چوله را در محاسبهٔ ارزش در معرض خطر در مورد برخی کالاها در موقعیت‌های کوتاه مدت و بلند مدت بررسی نمودند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهند که مدل‌های مبتنی بر توزیع t- استیودنت چوله در تمامی موارد از عملکرد بسیار خوبی برخوردار می‌باشند[۱۴]. هوآنگ و لین (۲۰۰۴) با تمرکز بر تفاوت موجود میان مدل‌های GARCH متقارن و نامتقارن و همچنین تفاوت میان توزیع‌هایی با دنبالهٔ نرمال و دنبالهٔ پهن (توزیع نرمال در مقابل توزیع t- استیودنت) به مقایسه عملکرد پیش بینی چندین مدل ارزش در معرض خطر پرداختند. آنها نشان دادند که در مورد بازده‌هایی با دنباله پهن و نوسانات خوشه ای، استفاده از مدل APARCH نرمال یا متقارن در سطوح اطمینان پایین تر عملکرد بهتری را نشان می‌دهد. اما در سطوح اطمینان بالاتر مدل APARCH با توزیع t- استیودنت از دقت بالاتری برخوردار می‌باشد[۱۶]. مپا (۲۰۰۴) عملکرد مدل‌های ARCH (q)، GARCH (p,q)، EGARCH (p,q)، TARCH (p,q) و PARCH (p,q) در مرتبه‌های متفاوت را در پیش بینی نوسان بازده نرخ ارز در کشور فیلیپین با استفاده از توزیع‌های نرمال، t- استیودنت و توزیع خطای تعمیم یافته مورد بررسی قرار داد. نتایج این تحقیق نشان می‌دهند که اولاً، مدل‌های TARCH(2,2)-T و PARCH(2,2)-T به ترتیب از بهترین عملکرد در مقایسه با سایر مدل‌های مورد بررسی برخوردار می‌باشند. ثانیاً، علاوه بر تمرکز بر روی قابلیت‌ها و ویژگی‌های این مدل‌ها در پیش بینی نوسانات آتی، توجه به کل توزیع نیز حائز اهمیت

می‌باشد چرا که توزیع نرمال در مقایسه با دو توزیع دیگر از عملکرد پایین تری برخوردار می‌باشد[۲۱]. آنجلیدیس و همکاران (۲۰۰۴) با استفاده از چندین مدل تخمین زننده نوسان بر روی سه نوع توزیع متفاوت و همچنین با در نظر گرفتن چهار حجم نمونه ای متفاوت، ارزش در معرض خطر یک روزه را در مورد پنج شاخص بازار در سطوح اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪ مورد بررسی قرار دادند. نتایج این بررسی نشان می‌دهند که در تمامی نمونه‌ها، در تمامی توزیع‌های مورد بررسی و همچنین در هر دو سطح اطمینان، مدل‌های GARCH از عملکرد بالاتری برخوردار می‌باشند و توزیع‌های لپتوکورتیک تخمین زننده‌های بهتری برای ارزش در معرض خطر به شمار می‌روند چرا که در محاسبهٔ مقادیر ارزش در معرض خطر در سطوح احتمال پایین عملکرد بهتری دارند[۲]. نتایج بررسی کاستلو و همکاران (۲۰۰۸) بر روی بازده روزانهٔ قیمت‌های نفت خام برنت نشان می‌دهند که مدل GARCH نیمه پارامتریک در مقایسه با مدل‌های ARMA با شبیه سازی تاریخی، پیش بینی دقیق تری از ارزش در معرض خطر را ارائه می‌دهد. آنها دلیل این امر را قابلیت مدل GARCH در توجیه پدیدهٔ نوسانات خوشه ای می‌دانند[۸]. فلوروس (۲۰۰۸) با استفاده از برخی مدل‌های خانوادهٔ ARCH، واریانس بازده روزانهٔ شاخص‌های CMA و TASE-100 را که به ترتیب متعلق به مصر و اسرائیل می‌باشند مدل سازی نمود. نتایج این تحقیق نشان می‌دهند که نوسان در این بازارها با ویژگیهای مدل‌های واریانس شرطی مورد بررسی مطابقت دارد[۱۱].

در این تحقیق از مدل‌های GARCH(1,1)، GARCH(2,2)، EGARCH(1,1)، PGARCH(1,1)، TGARCH(1,1)، GARCH(1,1)-M و CGARCH(1,1) بر روی سه توزیع احتمال نرمال، t- استیودنت و توزیع خطای تعمیم یافته برای محاسبه مقادیر ارزش در معرض خطر پارامتریک استفاده شده است. به منظور بررسی دقت مدل‌های مورد استفاده در محاسبهٔ ارزش در معرض خطر با استفاده از آزمون پس نگر، چهار معیار ارزیابی دقت به نامهای آزمون پوششی شرطی (LR_{uc})، آزمون استقلال پیاپی استثنائات (LR_{ind})، تابع زیان صفر و یک (BLF) و تابع زیان درجه دوم (QLF) استفاده گردیده است. ضمن آنکه در مورد بازده‌های روزانهٔ هر پرتفوی از سه حجم نمونه متفاوت برای انجام آزمون پس نگر استفاده شده است. توزیع‌های آماری مختلف، ویژگی دنباله‌های پهن توزیع بازده‌ها را مورد توجه قرار می‌دهند و حجم‌های نمونه‌ای متفاوت، تأثیر مشاهدات اخیر بر دقت مدل‌های مورد استفاده را نشان می‌دهند.

در ادامه پس از مروری بر مبانی روش ارزش در معرض خطر، مدل‌های مورد استفاده در محاسبهٔ ارزش در معرض خطر در بخش دوم شرح داده می‌شوند. در بخش سوم، معیارهای ارزیابی دقت عملکرد ارزش در معرض خطر ارائه می‌گردند. در بخش چهارم، به بحث پیرامون داده‌ها و تحلیل آماری مقدماتی آنها پرداخته می‌شود و نهایتاً در بخش پنجم، نتیجه گیری مطرح می‌گردد.

۲. ارزش در معرض خطر (VaR)

اگر $r_t = \log(p_t / p_{t-1})$ باشد در این صورت ارزش در معرض خطر را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$P(r_t \le VaR_t(\alpha, k)) = 1 - \alpha \qquad (۱)$$

p_t و r_t در روابط فوق به ترتیب بیانگر قیمت و بازده دارایی در زمان t می‌باشند. α سطح اطمینان و k دورهٔ زمانی است که ارزش در معرض خطر برای آن محاسبه می‌گردد. بر اساس تعریف ارائه شده توسط جوریون (۲۰۰۰) با فرض صفر بودن بازدهٔ مورد انتظار، محاسبهٔ ارزش در معرض خطر مبتنی بر یک توزیع نرمال به صورت زیر خواهد بود[۱۷]:

$$VaR_t^N = z_\alpha \hat{\sigma}_t + \mu \qquad (۲)$$

بطوریکه z_α معرف صدک αام دنبالهٔ سمت چپ توزیع نرمال استاندارد می‌باشد. همانگونه که در قسمت قبل نیز به آن اشاره گردید، محاسبهٔ ارزش در معرض خطر عمدتاً مبتنی بر روشهای پارامتریک و ناپارامتریک صورت می‌گیرد. هر یک از روشهای فوق مبتنی بر داده‌های تاریخی می‌باشند. با این تفاوت که در روش پارامتریک تحلیل داده‌های تاریخی بر روی توابع چگالی مشخصی انجام می‌شود حال آنکه در روش ناپارامتریک هیچ توزیع احتمال مشخصی برای داده‌ها در نظر گرفته نمی شود و به جای برآورد پارامترهای تابع چگالی، مستقیماً از خود داده‌های تاریخی برای محاسبهٔ ارزش در معرض خطر استفاده می‌شود.

۲-۱. مدل ناهمسانی واریانس شرطی تعمیم یافته (GARCH)

این مدل که توسط بولرسلو (۱۹۸۶) ارائه گردید بیان می‌کند که واریانس شرطی نه تنها با خطاهای پیش بینی یا مقادیر شوک‌های گذشته بلکه با وقفه‌های خود نیز همبستگی نشان می‌دهد. ساختار یک مدل GARCH(p,q) به شکل زیر می‌باشد[۴]:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (۳)$$

p و q به ترتیب مرتبه‌های فرایندهای GARCH و ARCH می‌باشند. r_t بازده دارایی و ε_t جزء اخلال می‌باشد. در این مدل فرض بر این است که اجزای اخلال از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_t^2 برخوردار می‌باشند. تمامی پارامترهای این مدل مثبت و شرط $\alpha + \beta < 1$ در آنها برقرار است.

۲-۲. مدل نا همسانی واریانس شرطی نمایی (EGARCH)

با استفاده از این مدل می‌توان اثرات اهرمی را مدل سازی کرد. مفهوم اثرات اهرمی که توسط بلک (۱۹۷۶) و فرنچ و همکاران (۱۹۸۷) مطرح گردید بیان می‌کند که تغییرات قیمت یک دارایی با تغییرات نوسان آن دارایی همبستگی منفی نشان می‌دهد[۳] و [۲]. ساختار مدل EGARCH(1,1) ارائه شده توسط نلسون (۱۹۹۱) به صورت زیر می‌باشد[۲۲]:

$$\log\left(\sigma_t^2\right) = \omega + \alpha_1 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \gamma \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right) + \beta_1 \log\left(\sigma_{t-1}^2\right) \qquad (۴)$$

وجود اثرات اهرمی را می‌توان با فرض $\gamma < 0$ آزمون کرد. اگر $\gamma \neq 0$ باشد آنگاه اثر شوک‌ها بر واریانس شرطی به صورت نامتقارن خواهد بود.

۲-۳. مدل ناهمسانی واریانس شرطی آستانه ای (TGARCH)

مدل دیگری که اثرات نامتقارن شوک‌ها بر واریانس شرطی را بررسی می‌کند مدل TGARCH ارائه شده توسط زاکوئیان (۱۹۹۴) و گلوستن، جاگاناتان و رانکل (۱۹۹۳) می‌باشد[۲۷] و [۱۵]. ساختار یک مدل TGARCH(1,1) را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \qquad (۵)$$

d_{t-1} به ازاء مقادیر $\varepsilon_t < 0$ مقدار یک و به ازاء سایر مقادیر ε_t، مقدار صفر را اختیار می‌کند. در این مدل تأثیر اخبار خوب به میزان α_1 و تأثیر اخبار بد به میزان $\alpha_1 + \gamma$ می‌باشد. اگر $\gamma > 0$ باشد در این صورت می‌توان گفت که اثر اهرمی وجود دارد.

۲-۴. مدل ناهمسانی واریانس شرطی توانی (PGARCH)

تیلور(۱۹۸۶) و شوارت (۱۹۸۹) مدل GARCH انحراف معیار را ارائه نمودند که در آن، انحراف معیار به جای واریانس مدل سازی می‌گردید[۲۶] و [۲۵]. دینگ و همکاران (۱۹۹۳) با بسط این مدل، مدل GARCH توانی را ارائه نمودند. در این مدل به جای استفاده از مقداری ثابت برای پارامتر توان انحراف معیار، مقدار آن تخمین زده می‌شود. به منظور بررسی اثرات نامتقارن شوک‌ها بر روی واریانس شرطی تا مرتبهٔ r، از پارامتر γ به صورت اختیاری در مدل استفاده شده است. ساختار یک مدل PGARCH(1,1) به صورت زیر می‌باشد[۹]:

$$\sigma_t^{\delta} = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left(|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i} \right)^{\delta} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^{\delta} \qquad (۶)$$

که در آن $\delta > 0$، به ازاء مقادیر $i = 1,\ldots,r$، $|\gamma_i| \le 1$، به ازاء تمامی مقادیر $i > r$، $\gamma_i = 0$ و $r \le p$ می‌باشد. در مدل متقارن به ازاء تمامی مقادیر i، γ_i برابر با صفر می‌باشد.

۲-۵. مدل اثر ناهمسانی واریانس شرطی در معادلهٔ میانگین (GARCH-M)

وجود همبستگی مثبت میان ریسک و بازده یکی از تئوری‌های مطرح در مباحث مالی را تشکیل می‌دهد. بر این اساس صرف ریسک بیشتر، بازدهی بیشتری را به همراه خواهد داشت. مدل GARCH-M این ویژگی را مدل سازی می‌کند (کیم و کن، ۱۹۹۴) [۱۸]. ساختار یک مدل GARCH-M استاندارد را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \theta \sigma_t^2 + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim N\left(0, \sigma_t^2\right) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \qquad (۷)$$

مثبت و معنی دار بودن θ نشان می‌دهد که افزایش در ریسک به افزایش در بازده منجر خواهد گردید. عبارت $\theta\sigma_t^2$ را می‌توان به عنوان صرف ریسک تفسیر نمود.

۲-۶. مدل ناهمسانی واریانس شرطی ترکیبی (CGARCH)

این مدل پدیدهٔ بازگشت به میانگین را مدل سازی می‌کند. ساختار یک مدل CGARCH(1,1) در رابطهٔ (۸) نشان داده شده است:

$$\sigma_t^2 = \varpi + \alpha_1 \left(\varepsilon_{t-1}^2 - \varpi \right) + \beta_1 \left(\sigma_{t-1}^2 - \varpi \right) \qquad (۸)$$

(۹)

$$\sigma_t^2 - q_t = \alpha_1\left(\varepsilon_{t-1}^2 - q_{t-1}\right) + \beta_1\left(\sigma_{t-1}^2 - q_{t-1}\right)$$

$$q_t = \omega + \rho\left(q_{t-1} - \omega\right) + \varphi\left(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2\right) \quad (۱۰)$$

در این مدل، بازگشت به میانگین به یک مقدار ثابت در طول زمان (ϖ) و همچنین بازگشت به میانگین به یک سطح متغیر q_t نشان داده شده است. σ_t و q_t در روابط (۹) و (۱۰) به ترتیب بیانگر نوسان شرطی و نوسان شرطی بلند مدت می‌باشند. روابط (۹) و (۱۰) به ترتیب جزء ناپایدار $\sigma_t^2 - q_t$ و جزء بلند مدت (q_t) را نشان می‌دهند.

۳. ارزیابی مدل‌های ارزش در معرض خطر

در این بررسی با استفاده از تابع زیان صفر و یک، تابع زیان درجه دو و آزمون‌های پوششی شرطی (آزمون استقلال پیاپی استثنائات) وغیر شرطی دقت مدل‌های ارزش در معرض خطر مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

۳-۱. تابع زیان صفر و یک (BLF)

در این تابع که توسط لوپز (۱۹۹۹) ارائه گردید، هر مقدار زیان واقعی که بیشتر از مقدار ارزش در معرض خطر باشد به عنوان یک استثنا تلقی می‌گردد و به آن عدد یک اختصاص می‌یابد. در غیر این صورت، تابع مقدار صفر به خود می‌گیرد. این تابع زیان عمدتاً بر تعداد استثنائات متمرکز می‌باشد و به ابعاد زیان توجهی ندارد. به این ترتیب خواهیم داشت[۲۰]:

$$L_{i,t+1} = \begin{cases} 1 & if \quad \Delta P_{i,t} < VaR_{i,t} \\ 0 & if \quad \Delta P_{i,t} \geq VaR_{i,t} \end{cases} \quad (۱۱)$$

۳-۲. تابع زیان درجه دو (QLF)

لوپز (۱۹۹۹) با ارائهٔ این تابع زیان، ابعاد استثنائات را مورد توجه قرار می‌دهد. شکل این تابع زیان به صورت زیر می‌باشد [20]:

$$L_{i,t+1} = \begin{cases} 1 + \left(\Delta P_{i,t} - VaR_{i,t}\right)^2 & if \quad \Delta P_{i,t} < VaR_{i,t} \\ 0 & if \quad \Delta P_{i,t} \geq VaR_{i,t} \end{cases} \quad (۱۲)$$

در این تحقیق از متوسط توابع زیان صفر و یک (ABLF) و درجه دو (AQLF) جهت ارزیابی دقت مدل‌های ارزش در معرض خطر استفاده شده است.

۳-۳. آزمون پوششی غیرشرطی (LR_{uc})

فرض صفر در این آزمون که توسط کوپیک (۱۹۹۵) ارائه گردید بیان می‌کند که احتمال عدم موفقیت یا رویداد استثنائات در عمل (π)، برابر با سطح احتمال در نظر گرفته شده در مدل (α) می‌باشد. آمارهٔ آزمون نسبت درستنمایی به صورت زیر می‌باشد[۱۹]:

$$LR_{uc} = -2\ln\left[\frac{\alpha^{n_1}(1-\alpha)^{n_0}}{\hat{\pi}^{n_1}(1-\hat{\pi})^{n_0}}\right] \sim \chi^2_{(1)} \qquad (۱۳)$$

که در آن، $\hat{\pi} = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$ تخمین حداکثر درستنمایی π و n_1 بیانگر تعداد استثنائات می‌باشد. $n_0 + n_1$ نیز تعداد کل مشاهدات را نشان می‌دهد.

۴-۳. آزمون استقلال پیاپی استثنائات (LR_{ind})

کریستوفرسن (۱۹۹۸) با بسط آماره LR_{uc} آزمونی را ابداع نمود که از طریق آن می‌توان استقلال پیاپی استثنائات را آزمود. وی متغیر نشانگر I_t را به صورت زیر تعریف کرد[۷]:

$$I_t = \begin{cases} 1 & if \;\; r_t < VaR_t \\ 0 & if \;\; r_t \geq VaR_t \end{cases} \qquad (۱۴)$$

آمارهٔ LR_{ind} که دارای توزیع مجانبی کای–اسکوئر با درجه آزادی یک است به صورت زیر می‌باشد:

$$LR_{ind} = -2\ln\frac{\hat{\pi}^{n_1}(1-\hat{\pi})^{n_0}}{(1-\hat{\pi}_{01})^{n_{00}}\hat{\pi}_{01}^{n_{01}}(1-\hat{\pi}_{11})^{n_{10}}\hat{\pi}_{11}^{n_{11}}} \sim \chi^2_{(1)} \qquad (۱۵)$$

n_{ij} بیانگر تعداد استثنائات مشاهده شده در زمان‌های *t-1* و *t* می‌باشد که به ترتیب با i و j نشان داده می‌شوند. π_{ij} احتمال شرطی وقوع استثنائات در زمان‌های *t-1* و *t* را نشان می‌دهد. به طوریکه:

$$\pi_{ij} = \Pr\{I_{t-1} = i \,|\, I_t = j\}(i, j = 0,1),\ \hat{\pi}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}},\ \hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$$

۴. داده‌ها و تحلیل آماری مقدماتی

داده‌های این تحقیق مشتمل بر بازده‌های روزانهٔ دو پرتفوی متشکل از شرکت‌های بورس اوراق بهادار تهران می‌باشد. یک پرتفوی، قیمت‌های روزانهٔ سهام تمامی شرکت‌هایی که سهام آنها بدون توجه به میزان نقدشوندگی و تعداد معاملات انجام شده بر روی آنها در یک دوره ۱۰ ساله مورد معامله قرار گرفته اند را شامل می‌شود. بازهٔ زمانی مورد بررسی در

رابطه با این پرتفوی که از این پس "پرتفوی بازار" نامیده می‌شود از تاریخ ۱۳۷۶/۱/۱ تا ۱۳۸۵/۱۲/۳۰ می‌باشد که تعداد ۲۱۴۲ مشاهده را در بر دارد. بازده‌های روزانه با استفاده از رابطهٔ $r_t = \ln(p_t / p_{t-1})$ محاسبه گردیده اند که r_t و p_t به ترتیب در آن معرف بازده و قیمت در روز t می‌باشند.

پس از محاسبه مقادیر بازده، شرکتی که از بیشترین تعداد بازده برخوردار بود به عنوان شرکت مبنا انتخاب گردید و بازده‌های سایر شرکت‌ها با آن منطبق گردید. در مرحلهٔ بعد، داده‌های مربوط به شاخص بازده نقدی و قیمت در بازهٔ زمانی مورد بررسی استخراج و بازده تک تک شرکت‌ها با بازده این شاخص منطبق گردید. با برازش بازده‌های مربوط به هر سهم بر روی بازده شاخص بازده نقدی و قیمت، مقادیر β مربوط به بازده‌های سهام شرکت‌ها محاسبه گردیدند. نهایتاً، با ضرب مقادیر β که به صورت یک ماتریس $1\times m$ می‌باشد (m برابر است با تعداد شرکت‌ها) در مقادیر بازده روزانه که به صورت یک ماتریس $m\times n$ می‌باشد (n برابر است با تعداد بازده روزانه مربوط به شرکتی که حداکثر بازده روزانه را دارد) و جمع تک تک مقادیر بدست آمده در هر ردیف (رابطهٔ (۱۶))، سری بازده مربوط به پرتفوی بازار بدست آمد.

$$r_P = \sum(\beta_i r_i) \qquad (۱۶)$$

پرتفوی دیگر که از این پس "پرتفوی ۵۰ شرکت" نامیده می‌شود مشتمل بر قیمت‌های روزانهٔ سهام شرکت‌هایی است که سهام آنها در یک دوره ۵ ساله در ٪۷۵ از روزهای معاملاتی سال، مورد معامله قرار گرفته اند. داده‌های این پرتفوی، بازهٔ زمانی ۱۳۸۱/۱/۱ تا ۱۳۸۵/۱۲/۳۰ را شامل می‌شود و مشتمل بر ۱۰۷۳ مشاهده می‌باشد. مراحل تشکیل بازده پرتفوی همانند پرتفوی بازار می‌باشد با این تفاوت که در این حالت به جای مقادیر β از وزن‌های مساوی (w_i) برای بازده‌های شرکت‌های مورد بررسی استفاده شده است. به این ترتیب، سری بازده پرتفوی از رابطه زیر بدست آمد:

$$r_P = \sum(w_i r_i) \qquad (۱۷)$$

در این تحقیق پس از تخمین مدل‌ها با استفاده از تمامی داده‌های مربوط به بازده‌های روزانهٔ پرتفوی‌های بازار و ۵۰ شرکت، مقادیر میانگین و واریانس شرطی برای یک و ده دورهٔ آتی پیش بینی گردیدند. سپس با استفاده از روابط زیر که به ترتیب مربوط به توزیع‌های نرمال، t- استیودنت و توزیع خطای تعمیم یافته می‌باشند مقادیر ارزش خطر در

سطوح اطمینان پایین (۹۰٪ و ۹۵٪) و سطوح اطمینان بالا (۹۹٪ و ۹۹/۵٪) برای بازده‌های پرتفوی‌های مورد بررسی محاسبه گردیدند.

$$VaR_t^N = z_\alpha \sigma_t + \mu_t \qquad (۱۸)$$

$$VaR_t^T = t_{\alpha,\nu} \sigma_t + \mu_t \qquad (۱۹)$$

$$VaR_t^G = g_{\alpha,\nu} \sigma_t + \mu_t \qquad (۲۰)$$

در روابط فوق، α سطح اطمینان مورد نظر و μ و σ به ترتیب میانگین و انحراف معیار داده‌های می‌باشند. ν و υ نیز به ترتیب پارامترهای تعیین شکل توابع توزیع t- استیودنت و توزیع خطای تعمیم یافته می‌باشند. به منظور محاسبهٔ مقادیر VaR_{t+1} و VaR_{t+10} بر اساس پیش بینی‌های یک روزه و ده روزهٔ مقادیر انحراف معیار و میانگین، به جای σ_t و μ_t در روابط فوق با استفاده از تمامی مقادیر مشاهدات، از مقادیر σ_{t+1} و μ_{t+1} مربوط به آخرین دوره برای محاسبهٔ VaR_{t+1} و مقادیر σ_{t+i} و μ_{t+i} مربوط به ده دورهٔ آخر برای محاسبهٔ VaR_{t+10} استفاده شده است $(i = 1,2,\ldots,10)$. ضمن آنکه مقادیر VaR_{t+10} بر اساس رابطهٔ زیر محاسبه گردیده اند:

$$VaR_{t+10} = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} VaR_{t+10}^2} \qquad (۲۱)$$

سپس با استفاده از معیارهای LR_{uc}، LR_{ind}، $ABLF$ و $AQLF$ در آزمون پس نگر، دقت عملکرد مدل‌های مورد استفاده در محاسبهٔ مقادیر ارزش در معرض خطر مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. نحوهٔ انجام آزمون پس نگر به این صورت است که یک حجم نمونهٔ انتخابی به صورت پنجره ای رو به جلو بر روی مقادیر پیش بینی شدهٔ سایر مشاهدات حرکت داده می‌شود و مقادیر ارزش در معرض خطر با احتساب تک تک مشاهداتی که به این حجم نمونهٔ انتخابی اضافه می‌شوند محاسبه می‌گردند و این کار تا رسیدن به آخرین مشاهده ادامه می‌یابد. در هر مورد، مقدار ارزش در معرض خطر بدست آمده با مقدار بازده روز گذشته مقایسه می‌گردد و در صورتیکه مقدار آن از مقدار بازده مربوطه بیشتر باشد به عنوان یک استثناء ثبت می‌گردد. به منظور ارزیابی دقت عملکرد مدل‌های مورد بررسی از معیارهای LR_{uc}، LR_{ind}، $ABLF$ و $AQLF$ در آزمون پس نگر استفاده شده است.

۵. نتیجه‌گیری

به طور خلاصه نتایج تمامی مدل‌هایی که در آزمون‌های ارزیابی دقت عملکرد مقادیر ارزش در معرض خطر یک روزه و ده روزه از بالاترین عملکرد برخوردار می‌باشند در نگاره (۱) تا (۴) ارائه گردیده اند. نگاره (۱) و (۲) به ترتیب مدل‌هایی را نشان می‌دهند که در پیش بینی مقادیر ارزش در معرض خطر یک روزه و ده روزه در مورد بازده‌های روزانهٔ پرتفوی بازار از بالاترین سطح عملکرد برخوردار می‌باشند. همانگونه که ملاحظه می گردد در سطوح اطمینان بالا توزیع t- استیودنت عملکرد بهتری را درمقایسه با توزیع‌های نرمال و خطای تعمیم یافته نشان می‌دهد. به این ترتیب این توزیع بهتر توانسته است دنباله‌های پهن توزیع بازده‌های این پرتفوی را پوشش دهد و تخمین درستی از مقادیر ارزش در معرض خطر یک روزه و ده روزه را نشان دهد. به علاوه، نتایج این تحقیق نشان می‌دهند که انتخاب حجم‌های نمونه ای متفاوت، عملکرد مدل‌های ارزش در معرض خطر را تحت تأثیر قرار می‌دهند. مثال بارز در این خصوص در پیش بینی مقادیر ارزش در معرض خطر یک روزه در سطح اطمینان ۹۹/۵٪ در مورد بازده‌های پرتفوی بازار قابل مشاهده می‌باشد. در این حالت با انتخاب ۵۰۰ و ۷۵۰ تعداد مشاهده، مدل CGARCH-T به لحاظ عدم موفقیت در آزمون LR_{uc} عملکرد قابل قبولی را نشان نمی دهد. اما با افزایش حجم نمونه به ۱۰۰۰ مشاهده، این مدل نه تنها آزمون‌های LR_{uc} و LR_{ind} را با موفقیت پشت سر می گذارد بلکه بر اساس معیارهای $ABLF$ و $AQLF$ بالاترین سطح عملکرد را نیز نشان می‌دهد. به طور کلی نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که افزایش حجم نمونه منجر به افزایش تعداد مدل‌هایی می گردد که مقادیر ارزش در معرض خطر را به درستی تخمین می‌زنند. نگاره (۳) و (۴) به ترتیب مدل‌هایی با بالاترین عملکرد در پیش‌بینی مقادیر ارزش در معرض خطر یک روزه و ده روزه در مورد بازده‌های پرتفوی ۵۰ شرکت را نشان می‌دهند. در مورد بازده‌های این پرتفوی نیز می‌توان گفت که توزیع t- استیودنت در مقایسه با دو توزیع دیگر عملکرد بالاتری را نشان می‌دهد.

نگاره ۱. مدل‌هایی که در پیش‌بینی مقادیر ارزش در معرض خطر یک روزه در مورد بازده‌های روزانهٔ پرتفوی بازار از بالاترین عملکرد برخوردار می‌باشند.

		حجم نمونه‌های انتخابی		
		۱۰۰۰	۷۵۰	۵۰۰
سطوح اطمینان	٪۹۰	-----	-----	-----
	٪۹۵	-----	-----	GARCH(1,1)-G
	٪۹۹	PGARCH(1,1)-T	PGARCH(1,1)-T	PGARCH(1,1)-T
	٪۹۹/۵	EGARCH(1,1)-T	EGARCH(1,1)-T	CGARCH(1,1)-T

نگاره ۲. مدل‌هایی که در پیش بینی مقادیر ارزش در معرض خطر ده روزه در مورد بازده‌های روزانهٔ پرتفوی بازار بالاترین عملکرد را نشان می‌دهند.

		حجم نمونه‌های انتخابی		
		۱۰۰۰	۷۵۰	۵۰۰
سطوح اطمینان	٪۹۰	-----	-----	-----
	٪۹۵	-----	-----	-----
	٪۹۹	PGARCH(1,1)-T	PGARCH(1,1)-T	PGARCH(1,1)-T
	٪۹۹/۵	CGARCH(1,1)-T	TGARCH(1,1)-T	CGARCH(1,1)-T

نگاره ۳. مدل‌هایی که در پیش‌بینی مقادیر ارزش در معرض خطر یک روزه در مورد بازده‌های روزانهٔ پرتفوی ۵۰ شرکت از بالاترین عملکرد برخوردار می‌باشند.

		حجم نمونه‌های انتخابی		
		۷۵۰	۵۰۰	۲۵۰
سطوح اطمینان	٪۹۰	GARCH(1,1)-M-N	GARCH(1,1)-M-N	GARCH(1,1)-M-G
	٪۹۵	GARCH(1,1)-M-T	GARCH(1,1)-M-T	GARCH(1,1)-M-T
	٪۹۹	TGARCH(1,1)-T	TGARCH(1,1)-T	TGARCH(1,1)-T
	٪۹۹/۵	TGARCH(1,1)-T	TGARCH(1,1)-T	TGARCH(1,1)-T

نگاره ۴. مدل‌هایی که در پیش بینی مقادیر ارزش در معرض خطر ده روزه در مورد بازده‌های روزانهٔ پرتفوی ۵۰ شرکت بالاترین عملکرد را نشان می‌دهند.

		حجم نمونه‌های انتخابی		
		۷۵۰	۵۰۰	۲۵۰
سطوح اطمینان	٪۹۰	-----	-----	-----
	٪۹۵	-----	-----	-----
	٪۹۹	GARCH(2,2)-T	GARCH(1,1)-N GARCH(1,1)-T GARCH(2,2)-N GARCH(2,2)-G TGARCH(1,1)-N TGARCH(1,1)-G EGARCH(1,1)-N EGARCH(1,1)-G CGARCH(1,1)-G	GARCH(1,1)-M-G PGARCH(1,1)-T
	٪۹۹/۵	PGARCH(1,1)-T	PGARCH(1,1)-T	GARCH(2,2)-T GARCH(1,1)-M-G

منابع

1. Akgiray, V., 1989, "Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns", *Journal of Business*, Vol. 62, PP. 55-80.
2. Angelidis, T., Benos, A., and Degiannakis, S., 2004, "The Use of GARCH Models in VaR Estimation, Statistical Methodology", Vol. 1, PP. 105-128.
3. Black, F., 1976, *Studies of Stock Price volatility Changes*, in Proceedings of the 1976 Meetings of the Business and Economics Statistics Section, American Statistical Association, PP. 177-181.
4. Bollerslev, T., 1986, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, PP. 307-327.
5. Burns, P., 2002, *The Quality of Value at Risk via Univariate GARCH*, Social Science Research Network (SSRN).
6. Christiansen, C., 1999, "Value at Risk Using the Factor-ARCH Model", *The Journal of Finance*, Vol. 1, No. 2.
7. Christoffersen, P. F., 1998, "Evaluating Interval Forecasts", *International Economic Review*, Vol. 39, No. 4, PP. 841-862.
8. Costello, A., Asem, E., and Gardner, E., 2008, *Comparison of Historically Simulated VaR: Evidence from Oil Prices*, Energy Economics, Article in Press.
9. Ding, Z., Granger, C. W. J., and Engle, R. E., 1993, "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model", *Journal of Empirical Finance*, Vol. 1, PP. 83-106.
10. Engle, Robert F., 1982, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimation of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, PP. 987-1007.

11. Floros, C., 2008, "Modelling Volatility Using GARCH Models: Evidence from Egypt and Israel", *Middle Eastern Finance and Economics*, Vol. 2, PP. 31-41.

12. French, K. R., Schwert, G. W., and Staumbaugh, R. F., 1987, "Expected Stock Returns and Volatility", *Journal of Financial Economics*, Vol. 19, PP. 3-29.

13. Giot, P., and Laurent, S., 2003a, "Value at Risk for Long and Short Trading Positions", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 18, PP. 641-664.

14. Giot, P., and Laurent, S., 2003b, "Market Risk in Commodity Markets: A VaR Approach, *Energy Economics*", Vol. 25, No. 5, PP. 435-457.

15. Glosten, L., Jaganathan, R., and Runkle, D., 1993, "Relationship between the Expected Value and Volatility of the Normal Excess Returns on Stocks", *Journal of Finance*, Vol. 48, PP. 1779-1802.

16. Huang, Y. C. and Lin, B. J., 2004, "Value-at-Risk Analysis for Taiwan Stock Index Futures: Fat Tails and Conditional Asymmetries in Return Innovations", *Review of Quantitative Finance and Accounting*, Vol. 22, PP. 79-95.

17. Jorion, P., 2000, *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, New York.

18. Kim, D., and Kon, S. I., 1994, "Alternative Models for Conditional Heteroscedasticity of Stock Returns", *Journal of Business*, Vol. 67, PP. 563-598.

19. Kupiec, P., 1995, "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", *Journal of Derivatives*, Vol. 3, PP. 73-84.

20. Lopez, J.,1999, "Methods for Evaluating Value-at-Risk estimates, Federal Reserve Bank of San Francisco", *Economic Review*, Vol. 2, PP. 3-17.

21. Mapa, D. S., 2004, "A Forecast Comparison of Financial Volatility Models: GARCH(1,1) is not Enough", *The Philippine Statistician*, Vol. 53, No. 1-4, PP. 1-10.

22. Nelson, D., 1991, "Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A new Approach", *Econometrica*, 59, 347-370.

23. Polasek, W., and Pojarliev, M., 2000, "VaR Estimations Based on Volatility Forecasts of GARCH Models", From: http://www.gloriamundi.org.

24. Roy, S., 2002, "Value at Risk in the Indian Government Securities Market: An Empirical Examination", From: http://www.gloriamundi.org.

25. Schwert, G. W., 1989, "Why does Stock Market Volatility Change over Time?", *Journal of Finance*, Vol. 54, PP. 1115-1151.

26. Taylor, S., 1986, *Modelling Financial Time Series*, John Wiley & Sons, New York.

27. Zakoian, J. M., 1994, "Threshold Heteroscedastic Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 18, PP. 931-955.