تحقیقات مالی
دوره ۱۲، شماره ۲۹
بهار و تابستان ۱۳۸۹
صص ۹۹ تا ۱۱۰

دانشکده مدیریت دانشگاه تهران

نقد فرمول‌های فعلی شاخص‌های بازدهی کل و ارایه فرمولی جدید

حمیدرضا فرهادی

چکیده: مطالعه حاضر با رویکرد کاربرد ریاضی در مالی و متفاوت با شیوه‌های رایج نگارش مقاله‌های علوم انسانی است. به‌عبارتی می‌توان این پژوهش را پژوهشی بنیادی و مبتنی بر دانش ریاضی جهت شفافیت و سلامت بیشتر اطلاعات بازار اوراق بهادار نامید. در این مقاله خطاهای اطلاعاتی که در فرمول‌های کنونی محاسبه شاخص‌های بازده دارند، مورد بررسی قرار می‌دهیم و به‌دنبال آن فرمول جایگزینی پیشنهاد می‌کنیم. در پایان به مقایسه‌ی بازده‌های دو فرمول قبلی و فرمول پیشنهادی می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: شاخص قیمت، شاخص بازدهی کل، بورس اوراق بهادار تهران.

۱- دانشیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ دریافت مقاله: ۱۲ / ۷ / ۸۸
تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۴ / ۱۱ / ۸۸
نویسنده مسئول مقاله: حمیدرضا فرهادی
Email: hfarhadi2002@yahoo.com

مقدمه

تعریف شاخص قیمت سهام

برای ورود به مبحث اصلی که در بخش‌های آتی تبیین خواهد شد، ابتدا به معرفی اجمالی شاخص‌های قیمت سهام می‌پردازیم.[۱] از حیث ریاضی، هدف از شاخص قیمت سهام مقایسه‌پذیر کردن ارزش زمان حال پرتفوی شاخص با ارزش پرتفوی شاخص در یک زمان پایه است. البته لزومی ندارد، سهام و تعداد آن‌ها در این دو پرتفوی با هم یکسان باشند (زیرا به مرور زمان ترکیب پرتفوی شاخص تغییر می‌کند). قبل از مقایسه‌ی مستقیم ارزش دو پرتفوی باید با مقیاسی ترکیب پرتفوی زمان حال را با ترکیب پرتفوی زمان پایه یکسان کرد تا قابلیت مقایسه ایجاد شود. این یکسان‌سازی توسط فرآیند پویای "*تعدیل پایه شاخص*" انجام می‌گیرد. برای مثال اگر مقدار شاخص در زمان پایه برابر ۱۰۰ و مقدار کنونی آن برابر ۱۲۰ باشد، آن‌گاه ارزش بازار به اندازه ۲۰٪ رشد کرده است مشروط بر آن‌که پرتفوی نهایی و پرتفوی اولیه یکسان باشند و بنابراین تغییر در ارزش کل تنها به‌واسطه‌ی تغییر در قیمت‌ها رخ داده باشد. در صورت ورود سهام جدید به شاخص (از طریق افزایش سرمایه و یا از طریق ورود شرکت‌های جدید) و یا خروج سهام از شاخص (از طریق کاهش سرمایه و یا از طریق خروج شرکت‌ها از شاخص) باید تعدیلات لازم انجام پذیرند تا دو پرتفوی اولیه و نهایی با هم قابلیت مقایسه داشته و پیوستگی شاخص حفظ شود (برای بحث کامل‌تر، به منبع [۱] مراجعه کنید).

شاخص‌های سهام برای پرتفوی‌های مختلفی محاسبه می‌شوند؛ در بورس تهران شاخص‌ها را برای بیش از چهل صنعت و پرتفوی محاسبه می‌کنند. به‌طورکلی یک شاخص قیمت از طریق فرمول:

$$I_t = \frac{M_t}{B_t} \times \text{عدد پایه}$$

محاسبه می‌شود، که در آن:

- "عدد پایه" عددی مثبت است که در طول عمر شاخص ثابت مانده و اغلب برابر ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ گرفته می‌شود که عدد شاخص در روز پایه است.
- M_t ارزش کل بازار پرتفوی شاخص است که توسط دستور زیر

۱- برای آشنایی بیشتر با فرمول‌ها و مکانیزم‌های این نوع شاخص‌ها می‌توانید به منابع [۱] و [۳] مراجعه کنید.

$$M_t = \sum_{i=1}^{n_t} p_{it} q_{it}$$

به‌دست می‌آید که در آن n_t تعداد شرکت‌های پرتفوی شاخص در زمان t، عدد p_{it} قیمت سهم i- ام در زمان t، و بالاخره q_{it} معرف تعداد سهام شرکت i- ام در زمان t است که در محاسبه عدد شاخص مورد استفاده قرار می‌گیرد.

- B_t عددی است که وقتی ترکیب پرتفوی شاخص تغییر کند (چه از لحاظ تعداد و چه از لحاظ ورود شرکت‌های جدید و یا خروج شرکت‌های از قبل موجود در پرتفوی شاخص)، آن‌گاه B_t به نحو مقتضی تغییر می‌کند تا تغییر در ترکیب پرتفوی شاخص تأثیری در روند آن نگذارد؛ تغییر عدد B_{t-1} به عدد B_t را تعدیل پایه می‌نامند. در ادامه روش تعدیل پایه توضیح داده خواهد شد (برای بحث‌های موازی می‌توانید به منبع [۱] مراجعه کنید).

عدد B_t در روز پایه، یعنی عدد B_0، را برابر ارزش بازار در روز پایه قرار می‌دهند، یعنی $B_0 = M_0$.

از آن‌جایی که عدد پایه در سراسر عمر شاخص ثابت می‌ماند، مناسب است که برای سادگی، عدد پایه را با B_t ترکیب کرده و شاخص را به‌صورت $I_t = \frac{M_t}{B_t}$ بنویسیم.

نحوه تعدیلات پایه

فرض کنید Δ_t جمع جبری موارد زیر در زمان t باشد:

- مقدار ریالی افزایش سرمایه‌های اتفاق افتاده در زمان t؛ که این عدد با علامت مثبت در نظر گرفته می‌شود؛
- مقدار ریالی کاهش سرمایه‌های اتفاق افتاده در زمان t؛ این عدد با علامت منفی در نظر گرفته می‌شود؛
- ارزش ریالی زمان t شرکت‌هایی که در زمان t به شاخص اضافه می‌شوند؛ این عدد با علامت مثبت در نظر گرفته می‌شود و درنهایت
- ارزش ریالی زمان t-۱ شرکت‌هایی که در زمان t از شاخص حذف می‌شوند؛ این عدد با علامت منفی در نظر گرفته می‌شود.

هدف ما یافتن روش تبدیل عدد B_{t-1} به عدد B_t است. رابطه بین B_{t-1} و B_t به هر گونه‌ای باشد، در زمان ثابت ماندن قیمت‌ها نباید شاخص تغییر کند. با فرض آن‌که قیمت‌های زمان t تغییری نسبت به قیمت‌های زمان t−۱ نداشته‌اند، ارزش بازار زمان t نسبت به ارزش بازار زمان t−۱ تنها به اندازه Δ_t افزوده خواهد شد، زیرا قیمت‌ها تغییر نکرده‌اند، یعنی درعمل تساوی زیر برقرار است:

$$M_t = M_{t-1} + \Delta_t$$

از سوی دیگر تحت فرض عدم تغییر قیمت‌ها، مقدار شاخص در زمان t برابر است با:

$$I_t = \frac{M_t}{B_t} = \frac{M_{t-1} + \Delta_t}{B_t}$$

این در حالی است که مقدار شاخص در زمان t−۱ برابر $I_{t-1} = \frac{M_{t-1}}{B_{t-1}}$ بوده است. چون تغییری در قیمت‌ها رخ نداده، دو مقدار شاخص برابر هستند؛ بنابراین نتیجه‌گیری‌های زیر برقرار است:

$$I_t = I_{t-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{t-1}}{B_{t-1}} = \frac{M_{t-1} + \Delta_t}{B_t} \quad \Rightarrow \quad B_t = B_{t-1} \times \frac{M_{t-1} + \Delta_t}{M_{t-1}}$$

پس تنها رابطه بین دو مقدار متوالی B_{t-1} و B_t باید به شکل زیر باشد تا انتظارات را در حالت خاص بالا برآورده کند:

$$B_t = B_{t-1} \times \frac{M_{t-1} + \Delta_t}{M_{t-1}} \quad \text{فرمول تعدیل پایه} \qquad (۱)$$

و این نحوه تعدیل پایه، در حرکت بین دو زمان متوالی محاسبه شاخص قیمت، برای حفظ پیوستگی شاخص انجام می‌گیرد.

فرمول (۱) رابطه‌ای بین دو مقدار متوالی شاخص فراهم می‌کند:

$$I_t = \frac{M_t}{B_t} = \frac{M_t}{B_{t-1} \times \left(\frac{M_{t-1} + \Delta_t}{M_{t-1}} \right)} = \frac{M_{t-1}}{B_{t-1}} \times \frac{M_t}{M_{t-1} + \Delta_t} = I_{t-1} \times \frac{M_t}{M_{t-1} + \Delta_t}$$

(۲) رابطه بین دو مقدار متوالی شاخص قیمت

$$I_t = I_{t-1} \times \frac{M_t}{M_{t-1} + \Delta_t}$$

بررسی دو فرمول رایج شاخص بازدهی کل

در بالا به معرفی شاخص قیمت پرداختیم. نوع دیگری از شاخص‌ها نیز برای سهام محاسبه می‌شود به نام شاخص بازدهی کل[1]. این شاخص‌ها نیز توسط فرمولی مشابه فرمول شاخص قیمت محاسبه می‌شوند:

$$J_t = \frac{M_t}{C_t} \qquad (۳)$$

که در آن، همچون قبل M_t معرف ارزش کل بازار در زمان t است، و J_t عدد شاخص بازدهی در زمان t است.

تفاوت شاخص بازدهی با شاخص قیمت در این است که در زمان تقسیم سود نقدی توسط شرکت‌ها تعدیلی در پایه شاخص قیمت انجام نمی‌گیرد، در حالی‌که در پایه شاخص بازدهی تعدیل انجام می‌گیرد تا پیوستگی شاخص بازدهی در هنگام تقسیم سود حفظ شود.

به‌دست آوردن فرمول تعدیل پایه در شاخص بازدهی

اگر D_t مقدار ریالی کل سودهای پرداختی در زمان t باشد، آن‌گاه مشابه فرمول (۱)، فرمول تعدیل پایه شاخص بازدهی کل به نحو زیر به‌دست می‌آید:

$$C_t = C_{t-1} \times \frac{M_{t-1} + \Delta_t - D_t}{M_{t-1}} \qquad (۴)$$

فرمول (۲) رابطه‌ای بین دو مقدار متوالی از شاخص قیمت به‌دست می‌دهد. فرمول (۲) را با استفاده از فرمول تعدیل پایه (۱) به‌دست آوردیم. اگر کاری مشابه در مورد شاخص بازدهی کل انجام دهیم، به فرمولی تراجعی برای مقادیر شاخص بازدهی کل می‌رسیم که به فرمول سرمایه‌گذاری مجدد[2] معروف است.

$$J_{1,t} = J_{1,t-1} \times \frac{M_t}{M_{t-1} + \Delta_t - D_t} \qquad (۵)$$

1- Total Return Index
2- Reinvestment Formula

این فرمولی است که در حال حاضر در سیستم معاملات "جم" در بورس تهران از آن استفاده می‌شود. شاخص بازدهی کل را به روش دیگری هم محاسبه می‌کنند که منطق آن به این شکل است: اگر B_t پایه شاخص قیمت در زمان t باشد، آن‌گاه ابتدا نسبت $\widetilde{D}_t = \frac{D_t}{B_t}$ را حساب می‌کنیم تا ارزش سود نسبت به روز پایه محاسبه شود (درواقع در این‌جا به عدد B_t به‌عنوان نرخ رشد نگاه می‌شود). سپس اگر I_t مقدار شاخص قیمت در زمان t باشد، آن‌گاه عدد $\frac{I_t + \widetilde{D}_t}{I_{t-1}}$ معرف بازدهی پرتفوی بازار از دوره زمانی از ۱- t تا t است. یعنی از این نسبت می‌توان به‌عنوان معیاری برای رشد بازار استفاده کرد؛ پس اگر $J_{2,t}$ شاخص بازدهی بازار باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم:

$$J_{2,t} = J_{2,t-1} \times \frac{I_t + \widetilde{D}_t}{I_{t-1}} \qquad (۶)$$

به یاد آوریم که رابطه (۵) بازدهی یک دوره‌ای شاخص J_1 را بر حسب عوامل M_t ، D_t و Δ_t بیان می‌کند. حال درصدد یافتن رابطه‌ای به این صورت برای J_2 برمی‌آییم که بعد استفاده خواهد شد. درواقع:

$$\frac{J_{2,t}}{J_{2,t-1}} = \frac{1}{I_{t-1}}\left[I_t + \widetilde{D}_t\right]$$

$$= \frac{1}{I_{t-1}}\left[\frac{M_t}{B_t} + \frac{D_t}{B_t}\right]$$

$$= \frac{1}{I_{t-1}}\left[\frac{M_t + D_t}{B_t}\right]$$

$$= \frac{B_{t-1}}{M_{t-1}}\left[\frac{M_t + D_t}{B_t}\right] \qquad \text{بنا به } I_{t-1} = \frac{M_{t-1}}{B_{t-1}} \text{ ،}$$

$$= \frac{B_{t-1}}{B_t} \times \frac{M_t + D_t}{M_{t-1}}$$

$$= \frac{M_{t-1}}{M_{t-1} + \Delta_t} \times \frac{M_t + D_t}{M_{t-1}} \quad \text{بنا به رابطه (۱)}$$

$$= \frac{M_t + D_t}{M_{t-1} + \Delta_t}$$

بنابراین

$$\frac{J_{2,t}}{J_{2,t-1}} = \frac{M_t + D_t}{M_{t-1} + \Delta_t} \qquad (۶)$$

در یک جمع‌بندی، دو فرمول زیر را برای دو مقدار متوالی شاخص بازدهی کل داریم که هر کدام از این فرمول‌ها براساس منطقی متفاوت حاصل شده است.

(۷) فرمول سرمایه‌گذاری مجدد $$J_{1,t} = J_{1,t-1} \times \frac{M_t}{M_{t-1} + \Delta_t - D_t}$$

(۸) فرمول بازدهی[1] $$J_{2,t} = J_{2,t-1} \times \frac{M_t + D_t}{M_{t-1} + \Delta_t}$$

مشکلات اطلاعاتی دو فرمول شاخص بازدهی کل

مشکلی که در فرمول‌های (۷) و (۸) ملاحظه می‌شود، در جمع جبری مؤلفه‌هایی است که برای زمان‌های متفاوت t و t-1 هستند؛ مشکل زمانی حاد است که برای مثال نماد شرکتی برای مدت طولانی بسته باشد و یا نرخ تورم بالا باشد، که به واسطه‌ی آن، عواملی که مربوط به زمان‌های متفاوت هستند، قابلیت مقایسه‌ی مستقیم را نداشته باشند و درنتیجه جمع کردن آن‌ها کاری غیرعقلایی باشد. این را با یک مثال زنده توضیح می‌دهیم: نماد شرکت آلومتک در فاصله‌ای طولانی قبل از تاریخ ۸۰/۱۲/۱۹ بسته بوده که پس از بازگشایی در آن روز و اعلان پرداخت سود نقدی از طرف شرکت، شاخص بازدهی که بر اساس فرمول (۷) محاسبه می‌شود عددی منفی می‌شود؛ به‌طور مشخص‌تر: در تاریخ ۸۰/۱۲/۱۹ به ازای هر سهم سود ۲۳۷۵۳ در نظر گرفته می‌شود که با توجه به تعداد سهام منتشره، یعنی ۲۲۶۸۰۰ سهم، سود پرداختنی شرکت در روز بازگشایی نماد برابر است با:

$$D_t = 23,753 \times 226,800 = 5,387,180,400$$

و افزایش سرمایه‌ای در کار نبوده، پس همچنین داریم $\Delta_t = 0$. قیمت هر سهم قبل از باز شدن نماد برابر ۱۱۰۳۵ است، که بی‌شک داریم:

1- Return Formula

$$M_{t-1} = 11,035 \times 226,800 = 2,502,738,000$$

از این‌رو مخرج کسر در سمت راست عبارت (۷) برابر می‌شود با:

$$M_{t-1} + \Delta_t - D_t = 2,502,738,000 + 0 - 5,387,180,400 = -2,884,442,400$$

این عدد منفی باعث منفی شدن شاخص می‌شود. علت چنین اتفاقی در این است که مقادیر M_{t-1} و D_t که اطلاعات زمان‌های مختلف را با خود به همراه دارند (و در این‌جا فاصله زمانی بین آن‌ها طولانی است) با هم جمع جبری شده‌اند.

ارایه فرمولی جایگزین جهت رفع مشکلات اطلاعاتی دو فرمول شاخص بازدهی کل

برای رفع این مشکل راهکاری بدون شرح ارایه می‌شود: ابتدا توجه کنید که در صورت تعادل بازار در زمان‌های قبل و بعد از بازشدن نماد تساوی زیر بین ارزش‌های بازار برقرار است:

$$M_t = M_{t-1} + \Delta_t - D_t \qquad (۹)$$

از این‌رو، در حالت تعادل، صورت و مخرج کسر (۷) با هم برابر هستند و بازدهی شاخص کل را برابر ۱ نشان می‌دهد. حال بیاییم رابطه (۹) را بدین صورت بازنویسی کنیم:

$$M_t - \Delta_t + D_t = M_{t-1} \qquad (۱۰)$$

پس در حالت تعادل بازار، کسر $\frac{M_t - \Delta_t + D_t}{M_{t-1}}$ برابر ۱ است. با توجه به این موضوع، فرمول جدید شاخص بازدهی را معرفی می‌کنیم:

$$J_{3,\,t} = J_{3,\,t-1} \times \frac{M_t - \Delta_t + D_t}{M_{t-1}} \qquad (۱۱)$$

حال به فرمول تعدیل پایه برای شاخص بازدهی $J_{3,\,t}$ می‌پردازیم؛ بنابراین می‌نویسیم:

$$J_{3,\,t} = \frac{M_t}{E_t}$$

که در آن مثل قبل عدد M_t معرف ارزش بازار کل است. برای یافتن رابطه بین دو مقدار متوالی E_t و E_{t-1}، فعلاً بنویسیم:

$$E_{3,\,t} = E_{3,\,t-1} \times x \qquad (۱۲)$$

سپس درصدد یافتن مقدار x برمی‌آییم. درواقع:

$$J_{3,\,t}=\frac{M_t}{B_{3,\,t}}=\frac{M_t}{B_{3,\,t-1}\times x}=\frac{M_{t-1}}{B_{3,\,t-1}}\times\frac{M_t}{M_{t-1}\times x}=J_{3,\,t-1}\times\frac{M_t}{M_{t-1}\times x}$$

بنابراین:

$$\frac{J_{3,t}}{J_{3,t-1}}=\frac{M_t}{M_{t-1}\times x} \qquad (۱۳)$$

با مقایسه‌ی تساوی (۱۳) با تساوی (۱۱) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{M_t}{M_{t-1}\times x}=\frac{M_t-\Delta_t+D_t}{M_{t-1}} \qquad (۱۴)$$

و از آن‌جا:

$$x=\frac{M_t}{M_t-\Delta_t+D_t} \qquad (۱۵)$$

با قرار دادن این مقدار در رابطه (۱۲) فرمول زیر را برای تعدیل پایه شاخص $J_{3,\,t}$ به‌دست می‌آوریم:

$$E_{3,t}=E_{3,t-1}\times\frac{M_t}{M_t-\Delta_t+D_t} \qquad (۱۶)$$

حال در حاشیه، حکمی راجع به رابطه سه فرمول بازدهی کل $J_{1,\,t}$ و $J_{2,\,t}$ و $J_{3,\,t}$ ارایه می‌دهیم. اما قبل از آن از رابطه (۹) به یاد آوریم که در صورت تعادل بازار (بین زمان‌های قبل و بعد از بازشدن نماد)، رابطه زیر برقرار است:

$$M_t=M_{t-1}+\Delta_t-D_t$$

فعلاً مقدار $M_{t-1}+\Delta_t-D_t$ را *ارزش تعادلی* بازار نام‌گذاری می‌کنیم و این عبارت را در حکم بعدی به‌کار می‌بریم.

حکم: فرض کنید، بعد از باز شدن نماد شرکتی، ارزش بازار کمتر از ارزش تعادلی باشد. همچنین فرض کنید که در زمان t سود $D_t>0$ اعلام شده باشد. آن‌گاه:

الف) در صورت وجود افزایش سرمایه از محل آورده نقدی، رابطه زیر بین بازدهی‌های سه شاخص برقرار است:

$$\frac{J_{3,t}}{J_{3,t-1}}<\frac{J_{1,t}}{J_{1,t-1}}<\frac{J_{2,t}}{J_{2,t-1}}$$

ب) در صورت نبود افزایش سرمایه از محل آورده نقدی، داریم:

$$\frac{J_{1,t}}{J_{1,t-1}} < \frac{J_{2,t}}{J_{2,t-1}} = \frac{J_{3,t}}{J_{3,t-1}}$$

اثبات: مرحله اول: در هر دو قسمت (الف) و (ب) باید رابطه $\frac{J_{1,t}}{J_{1,t-1}} < \frac{J_{2,t}}{J_{2,t-1}}$ را ثابت کنیم: درواقع ابتدا قرار دهید $X = M_{t-1} + \Delta_t - D_t$ و سپس توجه کنید که بنا به فرض داریم $M_t < M_{t-1} + \Delta_t - D_t$ ، و این به نوبه خود معادل است با:

$$M_t < M_{t-1} + \Delta_t - D_t \quad \Leftrightarrow \quad M_t < X$$

با ضرب دو طرف در عدد مثبت D_t

$$\Leftrightarrow \quad M_t D_t < D_t X$$

$$\Leftrightarrow \quad M_t D_t + M_t X < D_t X + M_t X$$

$$\Leftrightarrow \quad M_t (X + D_t) < (M_t + D_t) X$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{M_t}{X} < \frac{M_t + D_t}{X + D_t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{M_t}{M_{t-1} + \Delta_t - D_t} < \frac{M_t + D_t}{M_{t-1} + \Delta_t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{J_{1,t}}{J_{1,t-1}} < \frac{J_{2,t}}{J_{2,t-1}}$$

پس رابطه $\frac{J_{1,t}}{J_{1,t-1}} < \frac{J_{2,t}}{J_{2,t-1}}$ برقرار است.

مرحله دوم: حال به بررسی این می‌پردازیم که چه موقع رابطه $\frac{J_{3,t}}{J_{3,t-1}} < \frac{J_{1,t}}{J_{1,t-1}}$ برقرار است: با توجه به روابط (۷) و (۱۱) این نامساوی زمانی برقرار است که معادلات نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{M_t - \Delta_t + D_t}{M_{t-1}} < \frac{M_t}{M_{t-1} + \Delta_t - D_t}$$

و این به نوبه خود معادل است با:

$$\Leftrightarrow \quad (M_t - \Delta_t + D_t)(M_{t-1} + \Delta_t - D_t) < M_{t-1} M_t$$

$$\Leftrightarrow \quad M_t M_{t-1} + M_t\Delta_t - M_t D_t - \Delta_t M_{t-1} - \Delta_t^2 + \Delta_t D_t + D_t M_{t-1} + D_t\Delta_t - D_t^2 < M_{t-1}M_t$$

$$\Leftrightarrow \quad M_t\Delta_t - M_t D_t - \Delta_t M_{t-1} - \Delta_t^2 + \Delta_t D_t + D_t M_{t-1} + D_t\Delta_t - D_t^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (M_t\Delta_t - M_t D_t) + (D_t M_{t-1} - \Delta_t M_{t-1}) - (\Delta_t^2 - 2\Delta_t D_t + D_t^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad M_t(\Delta_t - D_t) - M_{t-1}(\Delta_t - D_t) - (\Delta_t - D_t)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\Delta_t - D_t)(M_t - M_{t-1} - \Delta_t + D_t) < 0 \qquad (۱۷)$$

اما زمانی که افزایش سرمایه و پرداخت سود با هم در یک زمان اتفاق می‌افتند، آن‌گاه میزان آورده نقدی به شرکت به‌طور منطقی بیشتر از سود پرداختنی است (زیرا خلاف آن غیر منطقی است)، پس بنابراین $0 < (\Delta_t - D_t)$. سپس رابطه (۱۷) تقلیل می‌یابد به:

$$\Leftrightarrow \quad (M_t - M_{t-1} - \Delta_t + D_t) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad M_t < M_{t-1} - \Delta_t + D_t \qquad (۱۸)$$

و این خود به معنی کوچک‌تر بودن ارزش بازار از ارزش تعادلی است. چون، بر طبق فرض، این رابطه آخر درست است، پس آن‌چه با آن معادل است باید درست باشد، پس بنابراین این درست است که $\frac{J_{3,\,t}}{J_{3,\,t-1}} < \frac{J_{1,\,t}}{J_{1,\,t-1}}$.

مرحله سوم: درنهایت توجه کنیم که اگر افزایش سرمایه‌ای از محل آورده در کار نباشد، آن‌گاه رابطه (۷) به $\frac{J_{2,\,t}}{J_{2,\,t-1}} = \frac{M_t + D_t}{M_{t-1}}$ و رابطه (۱۱) به $\frac{J_{3,\,t}}{J_{3,\,t-1}} = \frac{M_t + D_t}{M_{t-1}}$ تبدیل می‌شود ؛ بنابراین با مقایسه‌ی این دو تساوی به‌دست می‌آوریم: $\frac{J_{2,\,t}}{J_{2,\,t-1}} = \frac{J_{3,\,t}}{J_{3,\,t-1}}$.

بدین ترتیب اثبات هر دو قسمت (الف) و (ب) از قضیه کامل می‌شود.

نتیجه‌گیری

همان‌گونه که از روش پژوهش این مقاله روشن شد، ساختار نگارشی این مقاله در پی دنبال‌روی از روش‌های متداول پژوهش در علوم انسانی نیست. درواقع با استفاده از دانش ریاضی درصدد گوشزد کردن و بیان نقاط ضعف ابزاری بودیم که باید بهترین نماینده برای نمایش اطلاعات بازار سهام باشند. موضوع فرمول شاخص‌های مورد استفاده در

بازارهای مختلف و قوت و ضعف آن از عرصه‌های ورود تکنیک ریاضی به گستره علوم اقتصادی و مالی است.

با موضوع مورد بررسی در این مقاله که درواقع پیوندی بین علوم ریاضی و مالی است و به‌ویژه در ایران کمتر تجربه‌ای دیده شده است، نتیجه پژوهش حاضر نشان می‌دهد شاخص مورد استفاده کنونی در بازار سهام تهران ضعف‌های اطلاعاتی داشت که به کمک فرمول پیشنهادی، این ضعف‌ها قابل رفع است. از مشکلات فرمول شاخص فعلی می‌توان به کارآمدی ضعیف در زمان بالا بودن نرخ تورم و نیز بسته بودن طولانی یک نماد، اشاره کرد. مقاله حاضر، ضمن طرح مشکلات اطلاعاتی برخی از فرمول‌های شاخص بازده کل و ارایه فرمولی جایگزین، قضیه‌ای را نیز در رابطه با بازدهی‌های سه فرمول شاخص بازدهی کل اثبات نموده است.

منابع

1. CME Group Company. (2010). Guide to the Dow Jones Global Indexes.
2. Blitzer, David. (2003). Rethinking Float Adjustment in the Context of U.S. Indices. U.S.A: Standard & Poor's.
3. Tokyo Stock Exchange. (2009). Tokyo Stock Exchange Index Guidebook.