Higher Moments Portfolio Optimization with Entropy Based Polynomial Goal Programming

Ahmad Nabizade
Assistant Prof., Faculty of Management, University of Kharazmi, Tehran, Iran. E-mail: ahmadnabizade@gmail.com

Adel Behzadi
*Corresponding author, PhD. Candidate, Department of Financial Engineering, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: adel.bh145@gmail.com

Abstract

Objective: Portfolio selection is a critical factor in investment. Having considered a number of risky assets, fund managers must choose the optimum portfolio. Stock values can be affected by different types of events such as governmental crises, economic turmoil and industrial improvements. Due to the vague nature of these events, it is difficult to estimate the future value of stocks. However, Markowitz's Modern portfolio theory, which is principally focused on portfolio risk, has introduced a novel model for stock diversification. When the normality assumption of return series of assets are not valid, higher moments can also be added to ensure the efficiency of the Markowitz model. On other hand, entropy can be used as diversification creteria in portfolio theory. In this paper, the affect of simulatnus usage higher moment and entropy is examined.

Methods: In this paper, a polynomial goal programming based on the model of mean-variance-skidding-elongation-entropy and direct search algorithms is used. For estimation of entropy, Shannon and Ginny Simpson criteria have been used.

Results: Tehran Stock Exchange data was used to evaluate the models. The findings indicate portfolio performance measure is enhanced by using the proposed approach.

Conclusion: Using a combination of higher moments and entropy, although it does not improve some of the target functions, but generally improves the performance of the portfolios.

Keywords: Diversity index, Entropy, higher Moment portfolio, Portfolio optimization, Portfolio performance measure.

Citation: Nabizade, A., Behzadi, A. (2018). Higher Moments Portfolio Optimization with Entropy Based Polynomial Goal Programming. *Financial Research Journal*, 20(2), 193-210. (*in Persian*)

Financial Research Journal, 2018, Vol. 20, No.2, pp. 193-210
DOI: 10.22059/FRJ.2018.255731.1006645
Received: November 30, 2017; Accepted: May 02, 2018

گشتاور مراتب بالاتر در بهینه‌سازی پرتفوی با درنظر گرفتن آنتروپی و استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای

احمد نبی‌زاده

استادیار، گروه منابع انسانی و کسب‌وکار، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: ahmadnabizade@gmail.com

عادل بهزادی

* نویسنده مسئول، دانشجوی دکتری، گروه مدیریت مالی و بیمه، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: adel.bh145@gmail.com

چکیده

هدف: هدف این پژوهش، سرمایه‌گذاری کسب بازده متناسب با ریسک است. تحقیقات زیادی از جمله تئوری مارکوییتز (۱۹۵۲) نشان می‌دهد تشکیل پرتفوی با در نظر گرفتن بازدهی ثابت، سبب کاهش ریسک غیرسیستماتیک می‌شود. این نظریه بر اساس فرض‌هایی بنا شده است که یکی از آنها، نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌هاست؛ اما شواهد تجربی نشان از عدم نرمال بودن بازده دارایی‌ها دارد. از سوی دیگر، معیارهای آنتروپی برای نشان دادن تنوع‌سازی در پرتفوی عملکرد خوبی دارند. در مقاله پیش رو اثر استفاده ترکیبی از آنتروپی و گشتاورهای مراتب بالاتر نشان داده شده است.

روش: در این مقاله، رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای بر اساس مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی ـ آنتروپی استفاده شده است. همچنین، الگوریتم جست‌وجوی مستقیم به عنوان الگوریتم بهینه‌سازی مد نظر قرار گرفته و برای اندازه‌گیری آنتروپی از معیارهای شانون و جینی سیمپسون استفاده شده است.

یافته‌ها: به‌منظور بررسی مدل‌ها از داده‌های بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است. یافته‌ها گویای بهبود کارایی پرتفوی به دست آمده در حالت استفاده از آنتروپی جینی سیمپسون و شانون و به‌کارگیری الگوریتم جست‌وجوی مستقیم است.

نتیجه‌گیری: استفاده ترکیبی از گشتاورهای مراتب بالاتر و آنتروپی در برخی توابع هدف، بهبود ایجاد نمی‌کند، اما به‌طور کلی موجب بهبود کارایی پرتفوی‌های به دست آمده بر اساس معیار ارزیابی عملکرد ارائه شده در پژوهش می‌شود.

کلیدواژه‌ها: بهینه‌سازی پرتفوی، گشتاورهای مراتب بالاتر، شاخص تنوع‌سازی، آنتروپی، معیارهای ارزیابی عملکرد.

استناد: نبی‌زاده، احمد؛ بهزادی، عادل (۱۳۹۷). گشتاور مراتب بالاتر در بهینه‌سازی پرتفوی با درنظر گرفتن آنتروپی و استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای. *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۲۰(۲)، ۱۹۳– ۲۱۰.

فصلنامه تحقیقات مالی، ۱۳۹۷، دوره ۲۰، شماره ۲، صص. ۱۹۳–۲۱۰

DOI: 10.22059/FRJ.2018.255731.1006645

دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۰۹، پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۱۲

مقدمه

همواره یکی از مسائلی که جوامع و دولت‌ها با آن مواجه‌اند، تخصیص بهینه دارایی‌هاست به نحوی که اهداف و آرمان‌های افراد موجود در آن جامعه برآورده شود. از دیدگاه کلان اگر تخصیص دارایی به‌طور مناسب و بهینه‌ای صورت پذیرد، می‌تواند موجب رشد و توسعه اقتصادی جامعه شود و از دیدگاه خرد نیز، به افزایش مطلوبیت سرمایه‌گذار بینجامد. در این رابطه، به‌دلیل نااطمینانی و تصادفی بودن رفتار دارایی‌ها، محققان برای دستیابی به ترکیب بهینه، روش‌های مختلفی را ارائه داده‌اند.

بهینه‌سازی پرتفوی به معنای انتخاب ترکیب دارایی‌هایی است که موجب بیشینه‌شدن مطلوبیت سرمایه‌گذار شود. در این بین، مدل‌ها و روش‌های مختلفی ارائه شده که مدل بهینه‌سازی مارکویتز به عنوان مدل پایه در این حوزه مطرح است (مارکویتز[1]، ۱۹۵۲). محققان بسیاری ضمن بررسی و نقد مدل ارائه شده مارکویتز، تلاش کردند که این مدل را از جنبه‌های مختلف، چه از نظر ساختار مدل و چه از نظر روش حل، توسعه دهند. در تحقیقات صورت گرفته پیشین، به‌واسطه پیشرفت علم رایانه، محاسبات مالی با سرعت بیشتری انجام می‌شود و این موجب شده است که مدل‌ها به‌کمک رایانه‌های مدرن، به‌راحتی حل شوند.

یکی از مفروضاتی که مارکویتز برای ارائه مدل خود در نظر گرفت، نرمال بودن بازده دارایی‌هاست که برخی پژوهشگران نسبت به این فرض انتقاد کرده و نشان دادند که بازده دارایی‌ها در مواقعی از فرض نرمال بودن پیروی نمی‌کند. از این رو، فرض نرمال بودن می‌تواند سبب ایجاد تورش در نتایج به دست آمده در بهینه‌سازی سبد سهام شود (سانتوس و فرناندز[2]، ۲۰۰۰؛ ژانگ، ونگ، چن و نای[3]، ۲۰۰۷). بر اساس شواهد فراوان، توزیع‌های بازدهی غیرشرطی دارایی‌ها به‌وسیله میانگین ـ واریانس به‌طور کافی توضیح داده نمی‌شوند. این شواهد موجب شد که تعدادی از محققان گشتاورهای مرتبه بالاتر را در کانون توجه قرار دهند. در شرایط برابر، سرمایه‌گذاران باید دارایی‌های که چوله به راست دارند را به دارایی‌های که چوله به چپ دارند، ترجیح دهند. از طرفی آنها دارایی‌های با کشیدگی کمتر را به دارایی‌های که کشیدگی بیشتر دارند، ترجیح می‌دهند که این با تئوری ریسک‌گریزی آرو ـ پرات سازگار است. بنابراین دارایی‌های که چولگی پرتفوی را کاهش و کشیدگی را افزایش می‌دهند، مطلوبیت کمتری دارند (محمدی، نبی‌زاده، راعی و قالیباف، ۱۳۹۷).

هاروی و صدیق[4] (۲۰۰۲) به بررسی تأثیر گشتاور مرتبهٔ سوم در توضیح بازدهی دارایی‌ها در بورس نیویورک، آمکس و نزدک پرداختند. نتایج آنها نشان داد که چولگی شرطی به توضیح بهتر تغییرپذیری مقطعی بازدهی موردانتظار

1. Markowitz
2. Santos & Fernandes
3. Zhang, Wang, Chen, & Nie
4. Harvey & Siddique

دارایی‌ها کمک می‌کند و حتی هنگامی که عواملی مانند اندازه و ارزش دفتری به ارزش بازار در مدل حضور دارند، اهمیت گشتاور مرتبهٔ سوم بیشتر می‌شود. کوستاکیس، محمد و سیگانوس[1] (۲۰۱۲) به بررسی گشتاورهای مرتبهٔ بالا در توضیح بازدهی سهام در بورس نیویورک در فاصله زمانی ۲۰۰۸–۱۹۶۸ پرداختند. آنها نشان دادند در بازاری که سرمایه‌گذاران آن ریسک‌گریز، محتاط و معتدل هستند، شرکت‌هایی که دارای چولگی منفی و کشیدگی مثبت‌اند، باید صرف ریسک بالاتری نسبت به شرکت‌هایی که چولگی مثبت و کشیدگی منفی دارند، ارائه کنند.

از سوی دیگر، آنتروپی به عنوان معیاری برای اندازه‌گیری تنوع‌سازی در پرتفوی، توسط محققان مختلف معرفی شده است که می‌توان از این معیار در مدل بهینه‌سازی پرتفوی استفاده کرد (بهزادی و بختیاری، ۱۳۹۳)؛ همچنین کارایی بسیار بالایی در داده‌های خارج از نمونه دارد (برا و پارک[2]، ۲۰۰۸).

با توجه به آنچه بیان شد، برخی پژوهشگران تلاش کردند که در مدل‌های بهینه‌سازی پرتفوی، علاوه بر در نظر گرفتن گشتاور مراتب بالاتر، آنتروپی را نیز مدنظر قرار دهند (بهزادی و بختیاری، ۱۳۹۳؛ یو و ونگ[3]، ۲۰۱۷؛ رای و ماجومدر[4]، ۲۰۱۷). در همین رابطه، آکساریلی و پالا[5] (۲۰۱۷) نیز، کارایی دو نوع آنتروپی را با استفاده از مدلی با درجات گشتاور بالاتر، نشان دادند.

در مقاله حاضر تلاش شده است با استفادهٔ ترکیبی از گشتار مراتب بالاتر و آنتروپی، به بهینه‌سازی پرتفوی متشکل از صنایع مختلف در بورس اوراق بهادار تهران اقدام شود با این نکته که در آن از دو معیار مختلف برای اندازه‌گیری آنتروپی استفاده شده است. دو معیار مدنظر، آنتروپی شانون[6] و جینی سیمپسون[7] نام دارند و به‌دلیل چندمعیاره بودن مدل، برای حل مسئله از روش برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای (PGP)[8] استفاده شده است. همچنین در این مقاله برای حل مسئله، از الگوریتم جست‌وجوی مستقیم استفاده شده و داده‌های مسئله از داده‌های بورس اوراق بهادار تهران استخراج شده است.

در ادامه، ابتدا به بیان پیشینه تحقیق پرداخته می‌شود؛ سپس مروری بر مبانی نظری صورت می‌گیرد. در انتها یافته‌های پژوهش و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

پیشینه نظری پژوهش

به‌دست‌آوردن بهترین وزن هر دارایی بین مجموعه‌ای از دارایی‌ها، به حداکثرشدن مطلوبیت سرمایه‌گذار منجر می‌شود.

1. Kostakis , Mohammad & Siganos
2. Bera & Park
3. Yue & Wang
4. Ray & Majumder
5. Aksaraylı, & Pala
6. Shannon entropy
7. GiniSimpson entropy
8. Polynomial goal programming

مدل‌های مختلفی برای بهینه‌کردن پرتفوی معرفی شده‌اند که نخستین آن مدل مارکویتز (۱۹۵۲) بوده است. مارکویتز در مدل خود با حداقل کردن تابع هدف ریسک و در نظرگرفتن مجموعه محدویت‌هایی، به‌دنبال بهینه‌سازی بود. بعد از مارکویتز، مدل‌های دیگری ارائه شدند. در این تحقیق از مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای استفاده شده است. در این مدل، برای معرفی رابطه‌ها از نمادگذاری معرفی شده در پژوهش لای، یو و وانگ[1] (۲۰۰۶) استفاده شده است. در این بخش ابتدا قصد داریم مدل‌سازی بهینه‌سازی پرتفوی را شرح دهیم. فرض کنید که $X^{\mathrm{T}} = (\mathrm{x}_1 . \mathrm{x}_2 \dots . \mathrm{x}_\mathrm{n})$ ترانهاده بردار وزن تمام دارایی‌هاست و در آن x_i نشان‌دهنده وزن تخصیص یافته به دارایی i ام را نشان می‌دهد. V، S و K به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ واریانس، چولگی و کشیدگی دارایی‌ها هستند. میانگین، واریانس، گشتاور سوم (چولگی) و گشتاور چهارم (کشیدگی) پرتفوی به شرح رابطه‌های زیر است. یادآوری می‌شود که معرفی نمادها بر اساس نمادگذاری لای و همکارانش (۲۰۰۶) است.

$$Mean = R(x) = x^T \bar{R} = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$$ رابطهٔ ۱)

$$Variance = V(x) = \mathrm{E}(x^T(R-\bar{R}))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 v_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} x_i\, x_j cov(x_i . x_j))(i \neq j)$$ رابطهٔ ۲)

$$Skewness = S(\mathrm{x}) = \mathrm{E}(x^T(R-\bar{R}))^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 s_i^3 + 3\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} x_i^2\, x_j s_{iij} + \sum_{j=1}^{n} x_j^2\, x_i s_{iij})(i \neq j)$$ رابطهٔ ۳)

$$Kurtosis = K(\mathrm{x}) = \mathrm{E}(x^T(R-\bar{R}))^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^4 s_i^4 + 4\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} x_i^3\, x_j k_{iij} + \sum_{j=1}^{n} x_j^3\, x_i k_{iij})(i \neq j) + 6\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2\, x_i^2 k_{iij}(i \neq j)$$ رابطهٔ ۴)

در رابطه‌های بالا، $\bar{R}$ نشان‌دهنده بردار میانگین بازده دارایی‌هاست. چولگی و کشیدگی به‌صورت رابطه‌های ۳ و ۴ تعریف می‌شود. برای نشان دادن آنتروپی شانون و جینی سیمپسون به‌ترتیب از نمادهای SH و GS استفاده شده است. همچنین آنتروپی شانون و جینی سیمپسون به شرح رابطه‌های ۵ و ۶ به‌دست می‌آید (جوست[2]، ۲۰۰۶).

1. Lai, Yu & Wang
2. Jost

رابطهٔ ۵)
$$SH = -\sum_{i=1}^{n} x_i ln x_i = -X^T(lnX)$$

رابطهٔ ۶)
$$GS = 1 - \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1 - X^T X$$

در مقاله حاضر، از چارچوب تحقیق آکساریلی و پالا (۲۰۱۷) بهره برده شده و با در نظر گرفتن گشتاورهای مراتب بالاتر و آنتروپی شانون و جینی سیمپسون برای بهینه‌سازی پرتفوی استفاده شده است. تابع هدف این مدل، برنامه‌ریزی آرمانی چندجمله‌ای (PGP) است. این رویکرد نخستین بار توسط تای و لئونارد[1] (۱۹۸۸) برای بهینه‌سازی چندمعیاره استفاده شده است. شایان ذکر است که در مقاله‌های داخلی از رویکردهای دیگر برنامه‌ریزی آرمانی نیز برای بهینه‌سازی پرتفوی بهره برده شده است (تقی‌زاده یزدی، فلاح‌پور و احمدی مقدم، ۱۳۹۵ و اسلامی بیدگی و تلنگی، ۱۳۸۷).

مدل ۱)
$$\begin{aligned}
&Maximize\ X^T \bar{R}\\
&Minimize\ X^T V\, X\\
&Maximize\ E\big(X^T(R-\bar{R})\big)^3\\
&Minimize\ \big(X^T(R-\bar{R})\big)^4\\
&maximize\ -X^T(lnX)\\
&maximize\ 1 - X^T X\\
&subject\ to\ X^T 1_N = 1\\
&w \geq 0
\end{aligned}$$

در مدل ۱، 1_N نشان‌دهنده بردار $N \times 1$ است. برای حل مدل ۱ با استفاده از رویکرد PGP باید دو مرحله انجام شود: مرحله نخست تمرکز بر هر تابع هدف و به دست آوردن مقدار بهینه بدون در نظر گرفتن سایر توابع هدف است که با نمادهای R_{pe}^*، V_p^*، S_p^*، K_p^*، SH^* و GS^* نشان داده می‌شود. در مرحله دوم متغیرهای آرمانی d_1، d_2، d_3، d_4، d_5 و d_6 به‌منظور کمینه‌سازی انحراف‌ها به‌کار گرفته می‌شوند. در مرحله نخست، مسئله به شش زیر مسئله به شرح زیر دسته‌بندی می‌شود.

مدل ۲)
$$\begin{aligned}
&Maximize\ R_{pe}^* = X^T \bar{R}\\
&subject\ to\ X^T 1_N = 1\\
&X \geq 0
\end{aligned}$$

1. Tayi and Leonard

مدل ۳)

$$\begin{aligned}&Minimize\ V_p^* = X^T V X\\&subject\ to\ X^T 1_N = 1\\&x \geq 0\end{aligned}$$

مدل ۴)

$$\begin{aligned}&Maximize\ S_p^* = E\big(X^T(R-\bar{R})\big)^3\\&subject\ to\ X^T 1_N = 1\\&x \geq 0\end{aligned}$$

مدل ۵)

$$\begin{aligned}&Minimize\ K_p^* = \big(X^T(R-\bar{R})\big)^4\\&subject\ to\ X^T 1_N = 1\\&w \geq 0\end{aligned}$$

مدل ۶)

$$\begin{aligned}&maximize\ SH^* = -X^T(lnX)\\&subject\ to\ X^T 1_N = 1\\&w \geq 0\end{aligned}$$

مدل ۷)

$$\begin{aligned}&maximize\ GS^* = 1 - X^T X\\&subject\ to\ X^T 1_N = 1\\&x \geq 0\end{aligned}$$

مدل‌های فوق را می‌توان با استفاده از برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی حل کرد و توابع هدف را بـه دسـت آورد. حـال این توابع هدف با استفاده از فاصله مینوسکی[1] در قالب مدل PGP جمع می‌شوند. فاصله مینوسکی به‌صـورت رابطـه زیـر تعریف می‌شود (لای، یو و ونگ[2]، ۱۹۸۱).

رابطهٔ ۸)

$$Z = \left(\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{d_k}{Z_k}\right|^p\right)^{1/p}$$

در رابطه بالا، Z_k نشان‌دهنده مقدار استاندارد شده تابع هدف k ام و d_k انحراف از تابع هدف k ام است.

سرمایه‌گذاران بین اهداف مختلف خود، اولویت‌های خاصی دارند. اولویت هر تابع هدف با λ_i نشان داده می‌شود. در نظر گرفتن مقادیر مختلف λ_i می‌تواند مدل بهینه‌سازی را به شکل‌های مختلف تبدیل کند. به‌طور مثال، مدل‌هـای MV (میانگین ـ واریانس)، MVS (میانگین ـ واریانس ـ چولگی) و MVSK (میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی) حالت

1. Minkowski distance
2. Lai, Yu, Wang

خاصی از این مسئله است که با در نظر گرفتن مقادیر مختلف λ_i به دست می‌آید. حال با مشخص بودن λ_i و مقادیر بهینه هر یک از توابع هدف، در گام دوم مدل بهینه‌سازی به شکل زیر تبدیل می‌شود.

مدل ۸)

$$minimize\ Z = \left(1 + \left|\frac{d_1}{R_{pe}^*}\right|\right)^{\lambda_1} + \left(1 + \left|\frac{d_2}{V_p^*}\right|\right)^{\lambda_2} + \left(1 + \left|\frac{d_3}{S_p^*}\right|\right)^{\lambda_3} + \left(1 + \left|\frac{d_4}{K_p^*}\right|\right)^{\lambda_4} + (1 + \left|\frac{d_5}{SH^*}\right|)^{\lambda_5} + (1 + \left|\frac{d_6}{GS^*}\right|)^{\lambda_6}$$

$$subject\ to: X^T M + d_1 = R_{pe}^*$$

$$X^T V X - d_2 = V_p^*$$

$$E\left(X^T(R - M)\right)^3 + d_3 = S_p^*$$

$$\left(X^T(R - M)\right)^4 - d_4 = K_p^*$$

$$-X^T(lnx) + d_5 = SH^*$$

$$1 - X^T X + d_6 = GS^*$$

$$X^T 1_N = 1$$

$$x \geq 0$$

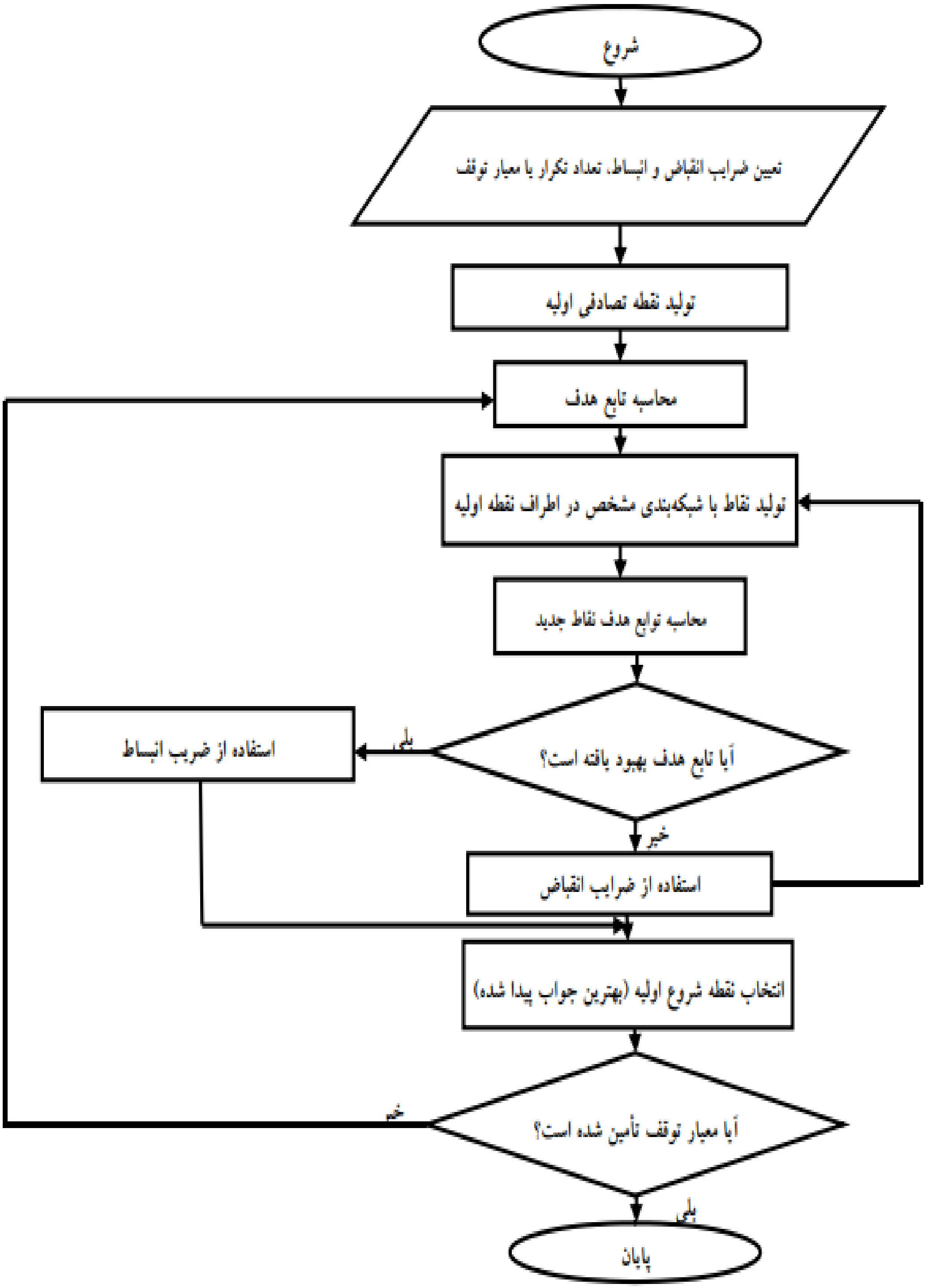
مسئله بالا را می‌توان با λ_i مختلف حل کرد و وزن‌های مربوطه را با توجه به سناریوهای مختلف به دست آورد. از سوی دیگر، از معیار شارپ برای ارزیابی عملکرد پرتفوی در آزمون‌های خارج از نمونه در مواقعی که بازدهی پرتفوی مثبت است و از معیار شارپ تعدیل شده ایسرالسن[1] (۲۰۰۵) برای ارزیابی عملکرد پرتفوی در مواقعی که بازدهی منفی است، استفاده می‌شود.

در مقاله پیش‌رو به‌منظور محاسبه شاخص ارزیابی عملکرد، از رویکرد پنجره غلتان بهره برده شده است. در این رویکرد، برخلاف تحقیق آکساریلی و پالا (۲۰۱۷) پنجره تخمین به طول ۷۰ روز (WL = ۷۰) در نظر گرفته می‌شود. در هر مرحله با استفاده از داده‌های مربوط به این پنجره تخمین و مقادیر بهینه به‌دست‌آمده برای هر تابع هدف، وزن‌های بهینه محاسبه می‌شود. این فرایند با غلت‌زدن پنجره و داده‌های جدید، تکرار شده و وزن‌های بهینه دوباره محاسبه خواهد شد.

الگوریتم جست‌وجوی مستقیم

الگوی جست‌وجوی مستقیم که سابقه آن به ۶۰ سال قبل برمی‌گردد، در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی به کار می‌رود؛ اما به‌طور عمده در روش غیرخطی از روش شبکه هیبریدی استفاده می‌شود. الگوریتم جست‌وجوی مستقیم را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد.

1. Israelsen



شکل ۱. ساختار مدل بهینه‌سازی مبتنی بر الگوریتم جست‌وجوی مستقیم

روش‌های مبتنی بر جست‌وجوی مستقیم از یک نقطه تصادفی در فضای تصمیم قابل قبول آغاز شده و با استفاده از ضرایب انبساط و انقباض به سمت فضای بهینه کلی حرکت کند (محمدی قلعه‌نی و ابراهیمی، ۱۳۹۱).

پیشینه تجربی پژوهش

در حوزه تحقیقات مالی یکی از مهم‌ترین مسائل انتخاب، پرتفوی بهینه است. یعنی سرمایه‌گذار چه ترکیبی از دارایی‌ها را انتخاب کند که با توجه به محدودیت‌های وی، مقدار مطلوبیت بیشینه شود.

در تئوری مدرن پرتفوی، فرض می‌شود مقدار بازده نوعی متغیر تصادفی است. یکی از مباحث اساسی در این گونه انتخاب معیار ریسک است. سرمایه‌گذار باید مقدار ریسک را کمینه و بازده را حتی‌الامکان بیشینه کند. پایه و اساس تئوری مدرن پرتفوی توسط مارکوئیتز گذاشته شد. مارکوئیتز واریانس را شاخص ریسک در نظر گرفت (مارکوئیتز، ۱۹۵۲).

در پژوهش دیگری مارکوئیتز نشان داد که معیار واریانس دارای نقص‌هایی است (مارکوئیتز، ۱۹۵۹). یکی از مهم‌ترین نقص‌های مطرح شده این است که واریانس، نسبت به بازده‌های بالا و پایین دید یکسانی دارد؛ یعنی مقدار بازده خیلی بالا و خیلی پایین برای سرمایه‌گذار، ریسک یکسانی را در پی خواهد داشت، ولی در جهان واقعی این طور به نظر نمی‌رسد. سرمایه‌گذاران فقط نوسان‌های بخش نامطلوب از بازده را شاخص ریسک در نظر می‌گیرند (روم و فرگوسن[1]، ۱۹۹۴). نتیجهٔ مطالعات فاما[2] (۱۹۶۵)، آردیتی[3] (۱۹۷۱)، سیموکویتز و بیدل[4] (۱۹۷۸) و چوناچیندا، دندپانی، حمید و پراکاش[5] (۱۹۹۷) نشان می‌دهد که بازده دارایی‌ها دارای توزیع متقارن نیست. نوسان‌های زیر میانگین بازده می‌تواند معیار مفیدی برای بیان ریسک در واقعیت باشد. یکی از معیارهایی که در این رابطه استفاده می‌شود، نیمه‌واریانس است که ابتدا توسط مارکوئیتز به عنوان معیار ریسک استفاده شد (مارکوئیتز، ۱۹۵۹) و پس از وی، محققان دیگری از آن استفاده کردند (چو و دنینگ[6]، ۱۹۹۴؛ گروتولد و هالرباش[7]، ۱۹۹۹).

از سوی دیگر، محققان بسیاری نشان دادند که در نظریهٔ پرتفوی، نمی‌توان از درجه‌های گشتاور بالاتر چشم‌پوشی کرد؛ مگر اینکه بنا به دلایلی مانند تقارن توزیع احتمال، این گشتاورها در نظر گرفته نشوند (کراس و لیتزنبرگ[8]، ۱۹۷۶؛ سانتوس و همکاران، ۲۰۰۰؛ ونگ و همکاران، ۲۰۰۷؛ ژانگ، ۲۰۰۳). شواهد در تحقیقات انجام شدهٔ پیشین نشان می‌دهد که اگر در مدل بهینه‌سازی از چولگی استفاده شود، سرمایه‌گذاران می‌توانند بازده بیشتری کسب کنند (هاروی، لیچتی،

1. Rom, & Ferguson
2. Fama
3. Arditti
4. Simkowitz, & Beedles
5. Chunhachinda, Dandapani, Hamid, & Prakash
6. Chow, & Denning
7. Grootveld, & Hallerbach
8. Kraus, & Litzenberger

لیتچی و مولر[1]، ۲۰۱۰)؛ اما در ادامه، در مدل‌های بهینه‌سازی علاوه بر درنظر گرفتن چولگی، کشیدگی نیز مدنظر قرار گرفت و از مدل MVSK نیز استفاده شد. در واقع، به نوعی چهار گشتاور اول بازده دارایی‌ها در مدل گنجانده شد که به نوعی خواص واقعی بازده دارایی‌ها مانند دنباله پهن و غیر نرمال بودن نیز در مدل بهینه‌سازی پرتفوی مدنظر قرار گرفت (اسکرینجاریک[2]، ۲۰۱۳).

از سویی، یکی از معیارهای دیگری که در بهینه‌سازی پرتفوی در کانون توجه برخی پژوهشگران قرار گرفته، آنتروپی است. دیمیگوئل و نوگالس[3] (۲۰۰۹) نشان دادند که هنگام وقوع بحران مالی، مدل میانگین ـ واریانس نسبت به پرتفوی که به خوبی متنوع‌سازی شده است، ریسک بیشتری دارد. آنتروپی معیاری از تنوع‌سازی است که می‌توان در تابع هدف مسئله بهینه‌سازی پرتفوی از آن استفاده کرد و آزمون خارج از نمونه نشان‌دهندهٔ کارایی بیشتر پرتفوی هنگام استفاده از آنتروپی است (برا و پارک، ۲۰۰۸). برخی محققان مانند یو و ونگ (۲۰۱۷) و رای و ماجومدر (۲۰۱۷) در مسائل بهینه‌سازی پرتفوی از گشتاورهای مراتب بالاتر و آنتروپی به‌صورت ترکیبی استفاده کرده‌اند. برخی دیگر نیز، به بررسی کارایی توابع مختلف آنتروپی در چارچوب مدل‌های با گشتاور بالاتر پرداخته‌اند (آکساریلی و پالا، ۲۰۱۷).

یافته‌های پژوهش

تجزیه و تحلیل توصیفی داده‌ها

به‌منظور بررسی رویکرد پیشنهاد شده، از داده‌های مربوط به بازده هشت صنعت منتخب استفاده شده است. اطلاعات مربوط به شاخص صنایع به‌صورت ماهانه از نرم‌افزار tseclient و در بازهٔ زمانی اسفند ۱۳۸۷ تا اسفند ۱۳۹۶ به دست آمد. این نمونه بر اساس روش نمونه‌گیری قضاوتی از بهترین صنایع بورسی انتخاب شد. داده‌ها با استفاده از متغیرهای میانگین، واریانس، چولگی وکشیدگی توصیف شدند و برای نشان دادن نرمال و متقارن نبودن توزیع داده‌ها، آزمون جارک ـ برا[4] به اجرا درآمد. آماره این آزمون بر اساس رابطه ۹ محاسبه می‌شود (جارک و برا، ۱۹۸۷).

رابطهٔ ۹)
$$JB = \frac{n}{6}\left(s^2 + \frac{(k-3)^2}{4}\right)$$

در این رابطه، n تعداد نمونه؛ s چولگی و k کشیدگی داده‌هاست. توجه داشته باشید که این آماره از توزیع مربع کای با دو درجه آزادی پیروی می‌کند.

1. Harvey, Liechty, Liechty& Müller
2. Škrinjarić
3. DeMiguel, & Nogales
4. Jarque and Bera

همان‌طور که مشاهده می‌کنید به‌جز صنعت بانکداری، سایر صنایع بر اساس آزمون جارک ـ برا نرمال نیستند. بنابراین برای کامل‌تر شدن مدل می‌توان از گشتاورهای مراتب بالاتر و همچنین آنتروپی استفاده کرد.

جدول ۱. توصیف داده‌ها

شرح	میانگین	واریانس	چولگی	کشیدگی	آماره جارک ـ برا	P-VALUE
کانه‌های فلزی	۰/۰۳۲	۰/۰۰۳	۰/۱۱۷	۸/۵۴۸	۱۸۲/۴۴۲	۰/۰۰۱
فراورده‌های نفتی	۰/۰۳۴	۰/۰۰۴	-۰/۱۸۴	۴/۴۶۷	۱۳/۵۴۱	۰/۰۰۸
لاستیک	۰/۰۲۸	۰/۰۰۴	-۰/۲۰۰	۵/۵۲۷	۳۸/۷۲۱	۰/۰۰۱
فلزات اساسی	۰/۰۳۴	۰/۰۰۴	-۰/۳۰۹	۵/۸۱۶	۴۹/۱۹۰	۰/۰۰۱
خودرو	۰/۰۲۵	۰/۰۰۶	۰/۲۴۷	۷/۹۱۳	۱۴۴/۲۵۵	۰/۰۰۱
شیمیایی	۰/۰۳۸	۰/۰۰۱	۰/۰۷۰	۵/۸۵۶	۲۳/۴۰۶	۰/۰۰۲
سیمان	۰/۰۲۹	۰/۰۰۳	-۰/۴۱۲	۴/۵۱۲	۱۷/۵۳۱	۰/۰۰۴
بانکداری	۰/۰۱۴	۰/۰۱۱	-۰/۱۳۶	۳/۳۹۹	۱/۳۷۶	۰/۴۳۶

اجرای مدل

در بهینه‌سازی با استفاده از روش PGP و رویکرد پنجره غلتان با افق ۷۰ ماهه، ابتدا مدل‌های ۲ تا ۷ اجرا شدند. برای اجرای مدل‌ها، به‌دلیل غیرخطی بودن از تابع patternsearch در نرم‌افزار متلب استفاده شد که مبتنی بر الگوریتم جست‌وجوی مستقیم است. میانگین توابع هدف هر مدل در رویکرد پنجره غلتان در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲. مقادیر بهینه هر یک از توابع هدف با توجه به مدل‌های ۲ تا ۷

میانگین بازدهی بهینه	میانگین واریانس بهینه	میانگین چولگی بهینه	میانگین کشیدگی بهینه	میانگین آنتروپی شانون بهینه	میانگین آنتروپی سیمپسون
۰/۰۳۹	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۴	۰/۸۵۴۸	۲/۶۳۴۵	۰/۹۳۵۴

در ادامه با توجه به مدل ۸ و ترکیب‌های مختلف λ_i، می‌توان ترکیب‌های متفاوتی از جواب‌های بهینه را محاسبه کرد. در مقاله پیش رو برای λ_i مقادیر باینری ۰ و ۱ در نظر گرفته شد و ۱۱ مدل مختلف با یکدیگر مقایسه شدند. علاوه بر این، مدل هم‌وزن (EXM) به عنوان مدل پایه نیز محاسبه شده است. میانگین هر تابع هدف محاسبه شده به تفکیک هر مدل در جدول ۳ ارائه شده است. توجه داشته باشید که اگر $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 1$ و برای سایر مقادیر λ_i برابر با صفر در نظر گرفته شود، مدل یاد شده به مدل میانگین ـ واریانس تبدیل خواهد شد.

همان طور که در جدول ۳ مشاهده می‌کنید، بین مدل‌های بدون آنتروپی، بیشترین بازدهی متعلق به مدل میانگین ـ واریانس است و هنگامی که آنتروپی در مدل‌ها در نظر گرفته می‌شود، به‌ترتیب مدل‌های میانگین ـ آنتروپی جینی سیمپسون و میانگین ـ آنتروپی شانون دارای بیشترین بازدهی هستند.

هنگامی که مدل میانگین ـ واریانس را با در نظر گرفتن دو معیار آنتروپی با یکدیگر مقایسه کنیم، مدل میانگین ـ واریانس معمولی دارای بیشترین مقدار واریانس، چولگی و کشیدگی بوده و در هر مدل، معیار آنتروپی همان مدل کمینه شده است.

در حالت اضافه شدن معیار کشیدگی به مدل میانگین ـ واریانس با در نظر گرفتن معیارهای آنتروپی، مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی دارای بهترین مقدار از لحاظ میانگین، واریانس، چولگی و کشیدگی بوده و در هر مدل معیار آنتروپی همان مدل کمینه شده است.

جدول ۳. میانگین توابع هدف

مدل	میانگین بازدهی	میانگین واریانس	میانگین چولگی	میانگین کشیدگی	میانگین آنتروپی شانون	میانگین آنتروپی سیمپسون
۱	۰/۰۳۰	۰/۰۰۵۷	-۰/۱۱۰۹	۶/۳۳۰۱	۲/۶۳۴۵	۰/۹۳۵۴
۲	۰/۰۳۴۲	۰/۰۰۲۲	-۰/۰۷۱۱	۰/۷۰۰۸	۰/۳۳۶۰	۰/۱۷۳۶
۳	۰/۰۳۳۶	۰/۰۰۲۱	-۰/۰۷۰۴	۰/۶۹۰۵	۰/۳۳۱۳	۰/۱۵۹۶
۴	۰/۰۳۲۰	۰/۰۰۲۱	-۰/۰۶۹۰	۰/۶۷۱۸	۰/۳۴۳۷	۰/۱۸۳۳
۵	۰/۰۳۴۸	۰/۰۰۵۵	-۰/۱۱۳۴	۵/۷۷۶۴	۲/۵۰۵۵	۰/۹۱۶۸
۶	۰/۰۳۳۰	۰/۰۰۲۵	-۰/۰۸۰۷	۰/۹۷۶۵	۱/۴۶۴۶	۰/۵۸۷۶
۷	۰/۰۳۲۸	۰/۰۰۲۴	-۰/۰۷۶۹	۰/۹۱۲۸	۱/۳۶۰۴	۰/۵۵۹۰
۸	۰/۰۳۱۸	۰/۰۰۲۱	-۰/۰۷۱۱	۰/۷۰۶۳	۰/۸۰۰۵	۰/۳۵۴۶
۹	۰/۰۳۷۳	۰/۰۰۵۵	-۰/۱۱۹۶	۵/۶۰۶۱	۲/۲۴۰۶	۰/۸۸۶۵
۱۰	۰/۰۳۲۹	۰/۰۰۲۵	-۰/۰۷۸۵	۰/۹۵۵۲	۱/۲۳۷۱	۰/۶۱۵۹
۱۱	۰/۰۳۲۶	۰/۰۰۲۴	-۰/۰۷۶۱	۰/۹۳۴۰	۱/۱۹۰۷	۰/۵۹۴۵
۱۲	۰/۰۳۰۵	۰/۰۰۲۱	-۰/۰۷۱۳	۰/۷۰۶۵	۰/۷۲۸۱	۰/۴۰۲۱

در جدول ۳ نتایج خروجی مدل‌های مختلف ارائه شده است. در این جدول منظور از مدل ۱، مدل هم‌وزن است و مدل‌های ۲ تا ۱۲ به‌ترتیب معرف مدل‌های میانگین ـ واریانس، میانگین ـ واریانس ـ چولگی، میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی، میانگین ـ آنتروپی شانون ، میانگین ـ واریانس ـ آنتروپی شانون، میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ آنتروپی شانون، میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی ـ آنتروپی شانون، میانگین ـ آنتروپی جینی سیمپسون، میانگین ـ واریانس ـ آنتروپی جینی سیمپسون، میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ آنتروپی جینی سیمپسون و میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی ـ آنتروپی جینی سیمپسون هستند.

در ادامه به منظور مقایسه مدل‌ها، از شاخص‌های ارزیابی عملکرد پرتفوی معرفی شده در بخش قبل استفاده شده است. دقت داشته باشید که به‌علت رو به بالا بودن بازار سرمایه در سال ۱۳۹۶، از MSR استفاده نشده، بلکه از PT برای مقایسه مدل‌ها از لحاظ هزینه معاملاتی استفاده شده است. در جدول ۴ نتایج این مقایسه ارائه شده است.

جدول ٤. مقایسه نتایج با استفاده از معیارهای ارزیابی عملکرد

شماره مدل	r_p^0	σ_p^0	SR	PT	P-value
۱	۰/۰۲۳۵	۰/۰۸۷۵	۰/۲۶۹۱	–	–
۲	۰/۰۲۷۴	۰/۰۵۸۵	۰/۴۶۸۸	۰/۰۳۱۲	۰/۱۹۴۶
۳	۰/۰۲۸۳	۰/۰۵۸۶	۰.۴۸۲۸	۰/۰۶۱۲	۰/۱۷۰۸
۴	۰.۰۳۲۱	۰/۰۵۶۴	۰/۵۶۹۹	۰/۰۱۹۴	۰/۰۳۱۸
۵	۰/۰۱۷۱	۰/۰۸۱۶	۰/۲۰۹۷	۰/۰۸۶۱	۰/۰۰۰۱
۶	۰/۰۲۷۱	۰/۰۵۰۱	۰/۵۴۱۷	۰/۰۴۲۲	۰/۰۰۰۱
۷	۰/۰۲۷۶	۰/۰۴۹۶	۰/۵۵۶۲	۰/۰۳۵۲	۰/۰۰۰۵
۸	۰/۰۳۱۷	۰/۰۵۲۰	۰/۶۱۱۲	۰/۰۱۷۳	۰/۰۰۲۵
۹	۰/۰۱۳۸	۰/۰۸۰۷	۰/۱۷۱۲	۰/۱۳۲۸	۰/۰۰۰۱
۱۰	۰/۰۲۸۶	۰/۰۴۷۵	۰/۶۰۳۰	۰/۰۵۱۰	۰/۰۰۰۱
۱۱	۰/۰۲۸۹	۰/۰۴۶۹	۰/۶۱۶۸	۰/۰۴۵۹	۰/۰۰۰۱
۱۲	۰/۰۳۴۹	۰/۰۴۹۳	۰/۷۰۷۵	۰/۰۱۸۱	۰/۰۰۰۱

همان طور که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی ـ آنتروپی جینی سیمپسون دارای بیشترین مقدار SR است. در بین مدل‌ها، مدل‌های میانگین ـ واریانس، میانگین ـ واریانس ـ آنتروپی شانون و میانگین ـ واریانس ـ آنتروپی جینی سیمپسون، مدل میانگین ـ واریانس ـ آنتروپی جینی سیمپسون دارای بهترین عملکرد از لحاظ SR هستند. همچنین از لحاظ آماری در سطح اطمینان ۹۵ درصد، اختلاف میان مدل‌های میانگین ـ واریانس ـ آنتروپی شانون و میانگین ـ واریانس ـ آنتروپی جینی سیمپسون معنادار است.

همچنین با مقایسه مدل‌های میانگین ـ واریانس ـ چولگی، میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ آنتروپی شانون و میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ آنتروپی جینی سیمپسون، مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ آنتروپی جینی سیمپسون دارای بیشترین مقدار SR بوده و میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ آنتروپی شانون عملکرد بهتری از لحاظ شاخص PT داشته است و فقط مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی اختلاف معناداری ندارد. هنگامی که کشیدگی در نظر گرفته می‌شود، مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی ـ آنتروپی جینی سیمپسون عملکرد بهتری نسبت به دو مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی و میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی ـ آنتروپی جینی سیمپسون دارد. در انتها مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی ـ آنتروپی جینی سیمپسون بهترین عملکرد را بین سایر مدل‌ها از لحاظ بازدهی و مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ آنتروپی جینی سیمپسون بهترین عملکرد را از لحاظ انحراف معیار داشته است.

مقایسه آزمون خارج از نمونه مطالعات گذشته نتایج جالبی را در پی دارد. برای مثال، برا و پارک (۲۰۰۸) به این نتیجه رسیدند که مدل میانگین ـ واریانس نسبت به مدل هم‌وزن نتایج بهتری را به دست می‌دهد.

همچنین یو و همکارانش (۲۰۱۴) نشان دادند که مدل میانگین واریانس نسبت به مدل میانگین ـ آنتروپی شانون عملکرد بهتری دارد، اما عملکرد مدل میانگین ـ آنتروپی جینی سیمپسون از دو مدل قبلی بهتر است.

اوستا و کانتار[1] (۲۰۱۱) نشان دادند که بر اساس شاخص SR مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ آنتروپی شانون عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های میانگین ـ واریانس و میانگین ـ واریانس ـ چولگی دارد. مدل میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی ـ آنتروپی جینی سیمپسون بهترین نتیجه را در بین مدل‌های پیشنهادی می‌دهد و مدل‌های میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی ـ آنتروپی شانون و میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی ـ آنتروپی جینی سیمپسون دارای مقادیر کمتری PT نسبت به مدل‌های میانگین ـ واریانس، میانگین ـ واریانس ـ چولگی و میانگین ـ واریانس ـ چولگی ـ کشیدگی بوده‌اند.

1. Usta, and Kantar

اکساریلی و پالا (۲۰۱۷) نیز نشان دادند که در صورت اضافه شدن آنتروپی شانون و جینی سیمپسون، معیارهای عملکرد پرتفوی بهبود می‌یابد، این در حالی است که مقادیر بازده مورد انتظار تغییر اندکی در پی خواهد داشت.

نتیجه‌گیری

متنوع‌سازی یکی از ابعاد مهم در بهینه‌سازی پرتفوی است. واریانس پرتفوی نیز یکی از اصلی‌ترین شاخص‌های اندازه‌گیری ریسک است و چون بر اساس داده‌های تاریخی محاسبه می‌شود، دارای نقص‌هایی است. آنتروپی معیاری برای اندازه‌گیری تنوع‌سازی در بهینه‌سازی پرتفوی است. این پژوهش با هدف گنجاندن آنتروپی و گشتاورهای مراتب بالاتر در مدل‌های بهینه‌سازی پرتفوی به اجرا درآمد. در این پژوهش از رویکرد بهینه‌سازی چندمعیاره برای بهینه‌سازی مدلی که میانگین، واریانس، چولگی، کشیدگی و آنتروپی را به‌صورت هم‌زمان درنظر می‌گیرد، استفاده شده است.

نتایج مقایسه مدل‌ها بر اساس شاخص‌های ارزیابی پرتفوی نشان می‌دهد که استفاده از آنتروپی به‌منظور متنوع‌سازی، موجب کاهش معنادار مقادیر بهینه سایر توابع هدف نمی‌شود. همان طور که مشاهده شد، هنگام استفاده از آنتروپی جینی سیمپسون و گشتاورهای مراتب بالاتر، بازده بیشتری نسبت به سایر مدل‌ها به دست آمد و از طرف دیگر آنتروپی شانون، تنوع‌سازی بیشتری نسبت آنتروپی جینی سیمپسون را نتیجه داد.

در مطالعات آتی توصیه می‌شود که مسئله از لحاظ روش حل توسعه داده شود. برای این کار می‌توان از الگوریتم‌های مختلف فراابتکاری از جمله الگوریتم‌های تکاملی استفاده کرد. همچنین می‌توان برای حل مسئله از سایر توابع اندازه‌گیری آنتروپی بهره برد. به عنوان پیشنهاد دیگر، می‌توان این نوع مدل‌ها را بر اساس منطق فازی بررسی کرد تا کارایی مدل‌ها از این جنبه نیز بررسی شود.

منابع

اسلامی بیدگلی، غلامرضا؛ تلنگی، احمد (۱۳۷۸). مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی در انتخاب پرتفولیوی بهینه. *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۴ (۲)، ۵۰-۷۱.

بهزادی، عادل؛ بختیاری، مصطفی (۱۳۹۳). ارائه مدلی بر مبنای میانگین ـ آنتروپی ـ چولگی برای بهینه‌سازی، *فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۵(۱۹)، ۳۹-۵۵.

تقی‌زاده یزدی، محمدرضا؛ فلاح پور، سعید؛ احمدی مقدم، محمد (۱۳۹۵). انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از برنامه‌ریزی فرا آرمانی و برنامه‌ریزی آرمانی ترتیبی توسعه‌یافته. *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۱۸(۴)، ۵۹۱-۶۱۲.

محمدی، شاپور؛ نبی‌زاده، احمد؛ راعی، رضا؛ قالیباف اصل، حسن (۱۳۹۶). طراحی و تبیین مدل قیمت گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای روش چند نمایشی کسری با استفاده از گشتاور مرتبه بالا در بورس اوراق بهادار تهران. *دانش سرمایه‌گذاری*، ۶ (۲۱)، ۲۱۵-۲۳۲.

محمدی قلعه‌نی، مهدی؛ ابراهیمی، کیومرث. (۱۳۹۱). ارزیابی الگوریتم‌های جست‌وجوی مستقیم و ژنتیک در بهینه‌سازی پارامترهای مدل غیرخطی ماسکینگام ـ یک سیلاب از کارون. *مدیریت آب و آبیاری*، ۲ (۲)، ۱-۱۲.

References

Aksaraylı, M., & Pala, O. (2018). A polynomial goal programming model for portfolio optimization based on entropy and higher moments. *Expert Systems with Applications*, 94:185-192.

Arditti, F. (1971). Another look at mutual fund performance. *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 6(3): 909-912.

Bera, A. K. & S. Y. Park (2008). Optimal portfolio diversification using the maximum entropy principle. *Econometric Reviews*, 27(4-6): 484-512.

Chow, K. V. and K. C. Denning (1994). On variance and lower partial moment betas the equivalence of systematic risk measures. *Journal of Business Finance & Accounting*, 21(2): 231-241.

Chunhachinda, P., K. Dandapani, S. Hamid & A. J. Prakash (1997). Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets. *Journal of Banking & Finance*, 21(2): 143-167.

DeMiguel, V. & Nogales, F. J. (2009). Portfolio selection with robust estimation. *Operations Research,* 57(3): 560-577.

Fama, E. F. (1965). Portfolio analysis in a stable Paretian market. *Management science*, 11(3): 404-419.

Grootveld, H. & Hallerbach, W. (1999). Variance vs downside risk: Is there really that much difference?. *European Journal of operational research,* 114(2): 304-319.

Harvey, C. R., Liechty, J. C., Liechty, M. W. and P. Müller. (2010). Portfolio selection with higher moments. *Quantitative Finance*, 10(5): 469-485.

Harvey, C. and Sediqque. (2000). Conditional skewness in asset pricing tests. *Journal of finance*, 55: 1263–1295.

Israelsen, C. L. (2005). A refinement to the Sharpe ratio and information ratio. Journal of Asset Management, 5(6), 423-427.

Jarque, C. M. & Bera, A. K. (1987). A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*: 163-172.

Jost, L. (2006). Entropy and diversity. Oikos, 113(2), 363-375.

Kostakis, A., Muhammad, K. & Siganos, A.(2012). Higher co-moments and asset pricing on London Stock Exchange. *Journal banking and finance*. 36(3): 913-922

Kraus, A. & Litzenberger, R. H. (1976). Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets. *The Journal of Finance* ,31(4): 1085-1100.

Lai, K. K., Yu, L., & Wang, S. (2006, June). Mean-variance-skewness-kurtosis-based portfolio optimization. In First International Multi-Symposiums on Computer and Computational Sciences (IMSCCS'06) (Vol. 2, pp. 292-297). IEEE.

Liu, S., Wang, S. & Qiu, W. (2003). Mean-variance-skewness model for portfolio selection with transaction costs. *International Journal of Systems Science,* 34(4): 255-262.

Machado, C., & Brandão, A. (2000). Skewness in financial returns: Evidence from the portuguese stock market, *Minho University (Portugal), Management Research Group Working Paper*

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1): 77-91.

Ray, A. & S. K. Majumder. (2017). Multi objective mean–variance–skewness model with Burg's entropy and fuzzy return for portfolio optimization. *OPSEARCH*: 1-27.

Rom, B. M. & Ferguson, K. W. (1994). Post-modern portfolio theory comes of age. *The Journal of Investing*, 3(3): 11-17.

Simkowitz, M. A. & Beedles, W. L. (1978). Diversification in a three-moment world. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(5): 927-941.

Škrinjarić, T. (2013). Portfolio Selection with Higher Moments and Application on Zagreb Stock Exchange. *Zagreb International Review of Economics & Business*, 16(1): 65-78.

Tayi, G. K. & Leonard, P. A. (1988). Bank balance-sheet management: An alternative multi-objective model. *Journal of the Operational Research Society,* 39(4): 401-410.

Usta, I. and Kantar, Y. M. (2011). Mean-variance-skewness-entropy measures: a multi-objective approach for portfolio selection. *Entropy*, 13(1): 117-133.

Yue, W. and Wang, Y. (2017). A new fuzzy multi-objective higher order moment portfolio selection model for diversified portfolios. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,* 465: 124-140.

Zhang, W.-G., Y.-L. Wang, Z.-P. Chen and Z.-K. Nie (2007). "Possibilistic mean–variance models and efficient frontiers for portfolio selection problem." Information Sciences 177(13): 2787-2801.