

## بهینه‌سازی پرتفوی ردیابی شاخص بر اساس بتای نامطلوب مبتنی بر الگوریتم‌های تکاملی

احمد نبی‌زاده<sup>۱</sup>، هادی قره‌باغی<sup>۲</sup>، عادل بهزادی<sup>۳</sup>

**چکیده:** بهینه‌سازی سبد سهام همواره یکی از با اهمیت‌ترین مسائل در علوم مالی است. استراتژی‌های مختلفی برای مدیریت پرتفوی سبد سهام استفاده شده‌اند که به‌طور عمده می‌توان آنها را بر دو نوع فعال و غیرفعال دسته‌بندی کرد. یکی از مهم‌ترین رویکردهای مدیریت غیرفعال پرتفوی، تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص است. به‌منظور تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص از مدل‌ها و الگوریتم‌های مختلفی استفاده می‌شود. پژوهش پیش رو به‌منظور بررسی عملکرد پرتفوی ردیاب شاخص با رویکرد نامتقارن و وارد کردن بتای نامطلوب در مدل ردیاب شاخص برای بهبود عملکرد آن است. به این منظور، ضمن به‌کارگیری سه مدل برای ردیابی شاخص، از دو الگوریتم تکاملی ژنتیک و تکامل دیفرانسیلی برای حل مدل مد نظر بهره برده شد. به‌منظور بررسی کارایی مدل نیز، از داده‌های بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است. نتایج در انتها نشان داد مدلی که بر مبنای بتای نامطلوب ارائه شده و توسط الگوریتم تکامل دیفرانسیلی حل شده است، کارایی بیشتری دارد.

**واژه‌های کلیدی:** الگوریتم‌های تکاملی، الگوریتم تکامل دیفرانسیلی، الگوریتم ژنتیک، بتای نامطلوب، ردیابی شاخص.

۱. استادیار دانشکده علوم مالی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

۲. کارشناس ارشد مدیریت مالی، دانشکده علوم مالی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

۳. دانشجوی دکتری مهندسی مالی، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۱۱/۱۱

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۶/۰۳/۲۷

نویسنده مسئول مقاله: هادی قره‌باغی

E-mail: hadi.gharehbaghi@gmail.com

## مقدمه

مدیریت سبد دارایی‌ها، دربرگیرندهٔ فعالیت‌های متفاوت مربوط به سرمایه‌گذاری در دارایی‌هاست. فرایند مدیریت سبد، به‌منظور انتخاب مجموعهٔ متنوع دارایی‌ها برای دستیابی به حداکثر بازده مورد انتظار با توجه به میزان ریسک‌پذیری یا ریسک‌گریزی فرد سرمایه‌گذار اجرا می‌شود. مدیریت سبد سهام، مطالعهٔ تمام ابعاد سهام از جمله ترکیب سهم‌ها، وزن هر یک از سهام موجود در پرتفوی و زمان بهینه برای تغییر ترکیب سبد است. دو استراتژی کلی سرمایه‌گذاران برای مدیریت دارایی‌ها و دستیابی به بازده و ریسک مورد انتظارشان عبارت‌اند از:

۱. رویکرد غیرفعال<sup>۱</sup>: در این رویکرد سرمایه‌گذاران به کارا بودن بازار اعتقاد دارند. نتیجهٔ اعتقاد به کارایی بازار، استفاده از استراتژی غیرفعال است که در آن سرمایه‌گذاران به خرید و نگهداری سهام اقدام کرده و فقط در صورت لزوم آنها را می‌فروشند. مزیت‌های این استراتژی، هزینهٔ مدیریت و معاملات پایین و حذف ریسک غیرسیستماتیک پرتفوی در اثر نگهداری تعداد زیاد سهام است. این استراتژی در بازارهای منفی انعطاف کافی ندارد.

۲. رویکرد فعال<sup>۲</sup>: در این استراتژی، اعتقاد بر این است که قیمت‌گذاری سهام ممکن است درست نباشد، در این صورت با خرید و فروش سهامی که به درستی قیمت‌گذاری نشده‌اند، می‌توان به سود بیشتری دست یافت.

ابتدایی‌ترین راه برای تکرار عملکرد یک شاخص توسط پرتفوی‌ای از اوراق بهادار، این است که تمام اوراق بهادار آن شاخص در وزن متناسب با وزن شاخص خریداری و نگهداری شود. واضح است که در این موقعیت، بازده پرتفوی کاملاً برابر با بازده شاخص خواهد بود. ضعف‌های این روش که تکرار کامل<sup>۳</sup> نام دارد، عبارت‌اند از: ۱. هر چه تعداد سهم‌هایی که شاخص را تشکیل می‌دهند بیشتر باشد، وزن هر سهم در پرتفوی بسیار کوچک خواهد شد؛ ۲. با تعدیل شاخص ترکیب پرتفوی نیز کاملاً تغییر می‌کند؛ ۳. یکی از مهم‌ترین مزیت‌های استراتژی غیرفعال نسبت به استراتژی فعال، هزینهٔ کمتر معاملاتی است که با اجرای فرایند تکرار کامل، نسبت به این مزیت تردید می‌شود. به دلیل وجود این مشکلات، بسیاری از مدیران غیرفعال به‌خصوص آنان که ردیابی شاخص‌های بزرگ را انجام می‌دهند، تعداد سهام کمتری از سهام تشکیل‌دهندهٔ شاخص را نگهداری می‌کنند (کاناکوز و بیسلی، ۲۰۰۹). مسئلهٔ تشکیل پرتفوی از سهم‌های یک شاخص

---

1. Passive  
2. Active  
3. Full replication

که بتواند عملکرد شاخص را بازسازی کند، بدون اینکه از تمام دارایی‌های تشکیل‌دهنده آن شاخص خریداری شود، مسئله ردیابی شاخص<sup>۱</sup> معرفی شده است. در این پژوهش ابتدا با اتکا به انحرافات نامطلوب، ردیابی شاخص به صورت نامتقارن صورت گرفت و در گام بعد با وارد کردن بتای نامطلوب در محدودیت‌های مدل، به بهبود عملکرد پرتفوی ردیاب شاخص اقدام شد و در نهایت، عملکرد آن با روش ردیابی شاخص به صورت متقارن مقایسه گردید. در ادامه، پس از مرور پیشینه پژوهش و مبانی نظری، فرضیه پژوهش و مدل‌های مد نظر ارائه می‌شود. سپس به منظور حل مدل‌ها، الگوریتم‌های پیشنهادی معرفی شده و مثال عددی برای نشان دادن کارایی مدل‌ها و روش‌های حل ارائه خواهد شد.

### پیشینه نظری پژوهش

به منظور ایجاد سبد سهامی که به خوبی شاخص را ردیابی کند، رویکردهای متفاوتی ارائه شده است. در این رویکردها، معیارهای مختلف خطای ردیابی و همچنین روش‌های حل گوناگونی به کار گرفته شده است. مدل بهینه‌سازی در نظر گرفته شده، اغلب مبتنی بر مینیمم‌سازی خطای ردیابی توسط تعداد مشخصی از دارایی‌هاست. بدین منظور استفاده از یکی از ابعاد مهم مسئله ردیابی شاخص، خطای ردیابی است که محققان برای آن تعاریف گوناگونی ارائه کرده‌اند. برخی محققان از قدرمطلق اختلاف بین بازده شاخص و بازده پرتفوی استفاده کرده‌اند و برخی دیگر از واریانس اختلاف بین بازده شاخص و بازده پرتفوی مد نظر بهره برده‌اند (جانسن و ون دیک، ۲۰۰۲). همچنین، در بخش مدل‌سازی مسئله، برخی محققان بتای پرتفوی ردیاب که باید به عدد ۱ نزدیک باشد را به کار بردند تا به جواب مطلوبی برسند.

معیاری که میزان موفقیت پرتفوی ردیاب را در دستیابی به رفتار مبتنی بر شاخص یا رفتار نزدیک به آن می‌سنجد، خطای ردیابی<sup>۲</sup> نامیده می‌شود. در تحقیقات انجام شده روش‌های متفاوتی در حوزه ردیابی شاخص برای خطای ردیابی ارائه شده است که در ادامه به معرفی آنها پرداخته می‌شود.

نخستین روش به کار رفته برای ردیابی شاخص، مبتنی بر مدل‌های عاملی است. راد با استفاده از مدل تک‌عاملی به ردیابی شاخص S&P500 پرداخت. در این مدل حداقل‌سازی واریانس پسماند با محدودیت بتای پرتفوی معادل ۱ مدنظر بود (راد، ۱۹۸۰).

1. Index Tracking  
2. Tracking Error

دومین روشی که برای تشکیل پرتفویی با عملکرد مشابه بازار توسعه پیدا کرد، مبتنی بر مدل میانگین - واریانس مارکوویتز بود. رول (۱۹۸۰) رویکرد ترکیبی مدل‌های عاملی و مارکوویتز را از طریق اضافه کردن یک محدودیت در خصوص بتای پرتفوی ردیابی کننده به کار برد. در حالت سوم، روش‌هایی با رویکرد اختصاصی برای محاسبه خطای ردیابی توسعه یافتند. نخستین معیار برای محاسبه خطای ردیابی به صورت قدر مطلق اختلاف بازده شاخص و پرتفوی استفاده می‌شود (رول، ۱۹۸۰).

$$TE = \sum_{t=k}^T |r_{pk} - r_{Ik}| \quad \text{رابطه (۱)}$$

که در آن،  $r_{pk}$  معرف بازده پرتفوی در زمان  $k$ ؛ نشان دهنده بازده شاخص مد نظر در زمان  $k$ ؛  $T$  تعداد دوره‌های ردیابی و  $T = 1, 2, 3, \dots$  است. معیار دیگر برای بررسی خطای ردیابی، استفاده از مجموع مجذور اختلاف بازده پرتفوی و شاخص است که به صورت رابطه ۲ تعریف می‌شود (مییاد و چانگ، ۲۰۰۳).

$$TE = \sum_{t=k}^T (r_{Ik}^t - r_{pk}^t)^2 \quad \text{رابطه (۲)}$$

روش دیگری که در ادبیات موضوع به عنوان خطای ردیابی از استقبال بیشتری برخوردار بوده، واریانس اختلاف بین بازده پرتفوی و شاخص در طول زمان است (مییاد و سالکین، ۱۹۸۹). در این صورت مقدار خطای ردیابی به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$TE = \sqrt{\sum_{t=k}^T \frac{(r_{pk} - r_{Ik})^2}{T}} \quad \text{رابطه (۳)}$$

تعریف دیگری از خطای ردیابی ارائه شده که در آن تنها انحرافات منفی از شاخص در نظر گرفته می‌شود (لی، سان و بائو، ۲۰۱۱).

$$TE = \frac{1}{T} \sqrt{\left( \sum_{t=k}^T (r_{pk} - r_{Ik})^2 I_{\{r_{pk} < r_{Ik}\}} \right)} \quad \text{رابطه (۴)}$$

معیار دیگری که برای ردیابی شاخص به کار برده شده، استفاده از ضریب همبستگی برای اندازه گیری شباهت دارایی هاست. دارایی های مشابه دسته بندی می شوند و از هر دسته یک نماینده برای تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص انتخاب می شود (کورنونه جولس و توتونجو، ۲۰۰۶). آخرین گام مدیریت پرتفوی، ارزیابی عملکرد پرتفوی و تعیین مطلوب<sup>۱</sup> یا نامطلوب<sup>۲</sup> بودن عملکرد است. ارزیابی عملکرد در مقایسه با پرتفوی یا پرتفوی های دیگر انجام می گیرد و باید به صورت نسبی (نه مطلق) ارزیابی شود (شارپ، الکساندر و بایلی، ۱۹۹۹). معیارهای ارزیابی عملکرد، بر اساس تئوری های پرتفوی طبقه بندی می شوند؛ به طوری که شاخص های جنسن، ترینر، شارپ، ضریب تعیین و نسبت ارزیابی مبتنی بر تئوری مدرن پرتفوی و شاخص های سورتینو، پتانسیل مطلوب<sup>۳</sup>، امگا<sup>۴</sup>، EPM<sup>۵</sup>، جنسن تعدیل شده، ترینر تعدیل شده و نسبت چشم انداز<sup>۶</sup> مبتنی بر تئوری فرامدرن پرتفوی هستند و در آنها انحرافات نامطلوب در نظر گرفته می شوند.

با توجه به اینکه در مدل های ردیابی شاخص، هدف اصلی کاهش خطای ردیابی است، در این پژوهش برای ارزیابی عملکرد هر یک از پرتفوی ها، از نسبت بازده پرتفوی به انحراف معیار خطا به صورت زیر استفاده شده است.

$$\frac{\text{portfolio return}}{\text{erro standard deviation}} = \frac{\bar{R}_p}{\text{std(error)}} \quad (\text{رابطه ۵})$$

### پیشینه تجربی پژوهش

کونو و ویجایانایاک (۲۰۰۰) با استفاده از الگوریتم شاخه و برگ و اضافه کردن هزینه های معاملاتی، مسئله مینیمم سازی خطای ردیابی شاخص را حل کرد. فرینو و گالاگر (۲۰۰۱) علاوه بر در نظر گرفتن هزینه مبادلات، اثر تقسیم سود را نیز در مسئله ردیابی سید سهام لحاظ کردند. آنها برای ردیابی شاخص S&P 500، به بررسی اثرات فصلی پرداختند که نتایج نشان داد در ماه ژانویه خطای ردیابی به میزان کمتری ظاهر می شود. گیلی و کلزی (۲۰۰۲) این مسئله را با استفاده از الگوریتم ابتکاری پذیرش آستانه حل کردند.

1. Superior Performance
2. Inferior Performance
3. Upside Potential Ratio
4. Adjusted skewness sharp ratio
5. Economic performance measure
6. Prospective Ratio

اوه، کیم و مین (۲۰۰۵) در کره جنوبی برای مسئله ردیابی شاخص از الگوریتم ژنتیک استفاده کردند. دوس و سینوتی (۲۰۰۵) ابتدا به خوشه‌بندی سهام مدنظر پرداختند و در مرحله بعد، از هر خوشه یک نماینده انتخاب کردند و در آخرین گام، وزن‌های بهینه‌نماینده‌های مشخص شده را به‌دست آوردند. کرینک، میتنیک و پاترلینی (۲۰۰۹) از الگوریتم تکامل دیفرانسیلی استفاده کردند و نشان دادند که الگوریتم یاد شده کارایی بیشتری از الگوریتم ژنتیک شبیه‌سازی تیرید دارد.

بارو (۲۰۰۹) مسئله بهینه‌سازی سید سهام شاخصی را با استفاده از روش حل چند مرحله‌ای بر مبنای برنامه‌ریزی تصادفی و در نظر گرفتن حداقل تعداد سهام در سید و هزینه مبادلات، حل کرد. گائو و لی (۲۰۱۳) مسئله ردیابی شاخص را به کمک مدلی که بر اساس حداقل تعداد سهام موجود در سید سهام بود با استفاده از روش الگوریتم شاخه و کران، حل کردند.

ژو، لو و ژو (۲۰۱۶) روش گرادیان کاهش‌یافته را به کار بردند؛ به این ترتیب که با استفاده از تکرارهای متوالی، مسئله حل می‌شود و هر تکرار به صورت خطی قابل حل است. در انتها برای اثبات کارایی، روش یاد شده با دو روش ترکیبی دیگر مقایسه شده است. شمس و ورسای (۱۳۸۹) به کمک یک روش فراابتکاری با محدودیت تعداد عدد صحیح و همچنین محدودیت کف و سقف سرمایه‌گذاری، به بررسی مسئله ردیابی سید سهام پرداختند و در نهایت با ۳۰ سهم توانستند شاخص کل بورس اوراق بهادار را ردیابی کنند.

حنیفی و بحرالعلوم (۱۳۹۱) با استفاده از محدودیت تعداد ۵، ۱۰، ۱۵ و ۲۰ سهم و الگوریتم ژنتیک، به حل مسئله ردیابی سید سهام پرداختند و از سه رویکرد الگوریتم ژنتیک کلاسیک، الگوریتم ژنتیک چندمرحله‌ای و الگوریتم ژنتیک بهبود یافته استفاده کردند. در انتها نتیجه گرفتند که الگوریتم ژنتیک چندمرحله‌ای کمترین خطا را دارد.

فلاح‌پور و تندنویس (۱۳۹۴) در پژوهشی به ردیابی سید سهام بر مبنای شاخص ۵۰ شرکت فعال تر بورس اوراق بهادار تهران پرداختند و با استفاده از روش بهینه‌سازی استوار نشان دادند که در نظر گرفتن این عدم قطعیت با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار، عملکرد مدل را بر مبنای معیارهای نسبت اطلاعاتی و خطای ردیابی بهبود می‌بخشد.

بر اساس آنچه بیان شد، فرضیه پژوهش حاضر به شرح زیر مطرح می‌شود:

وارد کردن بتای نامطلوب در ردیابی شاخص، عملکرد پرتفوی ردیاب شاخص را بهبود

می‌بخشد.

## روش‌شناسی پژوهش

### مدل مفهومی

در روش‌های ردیابی شاخص سنتی، خطای ردیابی به صورت متقارن است؛ یعنی انحرافات مثبت و منفی از شاخص در نظر گرفته می‌شود (لی و همکاران، ۲۰۱۱). بنابراین ساده‌ترین حالت مسئله ردیابی شاخص در رویکرد متقارن را به می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

$$\text{Min} \sqrt{\sum_{t=k}^T \frac{(r_{pk} - r_{1k})^2}{T}} \quad (\text{مدل ۱})$$

St:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (\text{محدودیت ۱})$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = k \quad (\text{محدودیت ۲})$$

$$X_i \leq y_i \quad \forall i = 1 \dots n \quad (\text{محدودیت ۳})$$

$$X_i \geq 0 \quad y_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1 \dots n \quad (\text{محدودیت ۴})$$

در این مدل،  $X_i$  نشان‌دهنده میزان سرمایه‌گذاری در دارایی  $i$ ام؛  $y_i$  نشان‌دهنده معرف انتخاب یا عدم انتخاب دارایی  $i$ ام و  $K$  محدودیت کاردینالیته است.

تابع هدف این مدل به دنبال حداقل کردن خطای ردیابی است. محدودیت اول، مجموع نسبت‌های سرمایه‌گذاری در دارایی‌ها را نشان می‌دهد. محدودیت دوم نشان‌دهنده محدودیت تعداد سهام است که به منظور ردیابی شاخص باید به کار گرفته شود که در این پژوهش معادل ۱۰ سهم در نظر گرفته شده است. محدودیت سوم گویای انتخاب یا عدم انتخاب یک دارایی است. عدم انتخاب دارایی به معنای سرمایه‌گذاری صفر است. محدودیت چهارم مقادیر مجاز برای نسبت سرمایه‌گذاری‌ها را نشان می‌دهد. براساس رابطه ۴، ردیابی شاخص می‌تواند به صورت نامتقارن<sup>۱</sup> باشد که در آن تنها انحرافات منفی (نامطلوب)<sup>۲</sup> از شاخص در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن رابطه ۴ برای اندازه‌گیری خطای ردیابی و با توجه به هدف مسئله پرتفوی ردیاب شاخص که به دنبال کمینه کردن خطای ردیابی است، مدل ۲ به شرح زیر خواهد بود.

1. Asymmetric  
2. Downside

$$\text{Min } \frac{1}{T} \sqrt{\left( \sum_{t=k}^T (r_{pk} - r_{lk})^2 I_{\{r_{pk} < r_{lk}\}} \right)} \quad (\text{مدل ۲})$$

St:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (\text{محدودیت ۱})$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = k \quad (\text{محدودیت ۲})$$

$$X_i \leq y_i \quad \forall i = 1 \dots n \quad (\text{محدودیت ۳})$$

$$X_i \geq 0 \quad y_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1 \dots n \quad (\text{محدودیت ۴})$$

مطابق مدل‌های راد (۱۹۸۰) و رول (۱۹۹۲) می‌توان بتای پرتفوی را در ردیابی شاخص به‌عنوان محدودیت‌های مدل به کار برد. با توجه به مفهوم بتا که بیان‌کننده میزان حساسیت بازده دارایی نسبت به بازده بازار است، اگر بتای پرتفوی برابر با ۱ باشد، می‌توان ادعا کرد که این دارایی به رویدادهای اقتصادی، حساسیت یکسانی نشان می‌دهد. همانند به‌کارگیری انحرافات متقارن و نامتقارن در ردیابی شاخص، در محاسبه بتا نیز از این رویکرد بهره‌برده شده است (استردا، ۲۰۰۲). برای به‌دست آوردن ریسک دارایی  $i$  در حالت متقارن می‌توان از انحراف معیار بازدهی‌های آن دارایی استفاده کرد.

$$\sigma_i = \sqrt{E[(R_i - \mu_i)^2]} \quad (\text{رابطه ۶})$$

در حالتی که دارایی  $i$  از میان تعداد زیادی از دارایی‌های موجود در بازار انتخاب شده است؛ ریسک آن دارایی با در نظر گرفتن کواریانس آن با بازار محاسبه می‌شود.

$$\sigma_{iM} = E[(R_i - \mu_i)(R_M - \mu_M)] \quad (\text{رابطه ۷})$$

در رابطه ۷،  $M$  شاخص بازار است. از آنجا که کواریانس بیکران<sup>۱</sup> و وابسته به مقیاس<sup>۲</sup> است، با تقسیم کواریانس بازده دارایی و بازده بازار بر انحراف معیار بازده دارایی و انحراف معیار بازده بازار، معیار مفیدتری از ریسک با نام همبستگی به‌دست می‌آید.

$$\rho_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_i \sigma_M} = \frac{E[(R_i - \mu_i)(R_M - \mu_M)]}{\sqrt{E[(R_i - \mu_i)^2]E[(R_M - \mu_M)^2]}} \quad (\text{رابطه ۸})$$

- 
1. Unbounded
  2. Scale-dependent



به شکل دیگر، با تقسیم کواریانس بازده دارایی و بازده بازار به واریانس بازار، بتای دارایی  $i$  حاصل می‌شود.

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{E[(R_i - \mu_i)(R_M - \mu_M)]}{E[(R_M - \mu_M)^2]} \quad \text{رابطه ۹}$$

بتای دارایی  $i$  را می‌توان به شکل زیر نیز تعریف کرد.

$$\beta_i = \rho_{iM} \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \right) \quad \text{رابطه ۱۰}$$

حال برای به دست آوردن بتای پرتفوی از میانگین وزنی بتای هر یک از دارایی‌ها استفاده می‌شود.

$$\beta_p = \sum_i^n w_i \beta_i \quad \text{رابطه ۱۱}$$

در صورتی که بخواهیم بتای دارایی را در شرایط نامتقارن به دست آوریم، محاسبات به شرح زیر تغییر خواهند کرد (استردا، ۲۰۰۲). در این حالت ریسک دارایی منفرد با استفاده از نیمه انحراف معیار<sup>۱</sup> به دست می‌آید.

$$\sum_i = \sqrt{E\{\text{Min}[(R_i - \mu_i). 0]^2\}} \quad \text{رابطه ۱۲}$$

به همین ترتیب می‌توان نیم انحراف معیار را برای بازار به دست آورد.

$$\sum_M = \sqrt{E\{\text{Min}[(R_M - \mu_M). 0]^2\}} \quad \text{رابطه ۱۳}$$

در ریسک نامطلوب<sup>۲</sup>، کواریانس بین دارایی  $i$  با بازار به صورت نیمه کواریانس<sup>۳</sup> محاسبه می‌شود.

$$\sum_{iM} = E\{\text{Min}[(R_i - \mu_i). 0] \text{Min}[R_M - \mu_M]. 0\} \quad \text{رابطه ۱۴}$$

در این حالت نیز نیمه کواریانس همانند کواریانس در حالت متقارن، بیکران و وابسته به مقیاس است. با تقسیم نیمه کواریانس بازده دارایی و بازده بازار بر نیمه انحراف معیار بازده دارایی

1. Semi deviation  
2. Downside Risk  
3. Cosemivariance

و نیمه انحراف معیار بازده بازار، می‌توان نیمه کوریانس را استاندارد کرد و به معیار مناسب‌تر ضریب همبستگی نامطلوب<sup>۱</sup> دست یافت.

$$\theta_{iM} = \frac{\sum_{iM}}{\sum_i \sum_M} = \frac{E\{Min[(R_i - \mu_i). 0]Min[R_M - \mu_M]. 0]\}}{\sqrt{E\{Min[(R_i - \mu_i). 0]^2\}E\{Min[(R_M - \mu_M). 0]^2\}}} \quad \text{رابطه ۱۵}$$

به شکل دیگر، با تقسیم نیمه کوریانس بازده دارایی و بازده بازار به نیمه واریانس<sup>۲</sup> بازار بتای نامطلوب<sup>۳</sup>، دارایی  $i$  حاصل می‌شود.

$$\beta_i^D = \frac{\sum_{iM}}{\sum_M^2} = \frac{E\{Min[(R_i - \mu_i). 0]Min[R_M - \mu_M]. 0]\}}{E\{Min[(R_M - \mu_M). 0]^2\}} \quad \text{رابطه ۱۶}$$

بتای نامطلوب دارایی  $i$  را می‌توان به شکل زیر نیز بیان کرد.

$$\beta_i^D = \theta_{iM} \left( \frac{\sum_i}{\sum_M} \right) \quad \text{رابطه ۱۷}$$

حال می‌توان برای به دست آوردن بتای نامطلوب پرتفوی از میانگین وزنی بتای نامطلوب هر یک از دارایی‌ها استفاده کرد.

$$\beta_p^D = \sum_i^n w_i \beta_i^D \quad \text{رابطه ۱۸}$$

با توجه به رابطه‌های ۴ و ۱۶ می‌توان مدل مبتنی بر انحرافات نامطلوب را با وارد کردن بتای نامطلوب در محدودیت‌ها، به شرح زیر توسعه داد:

$$Min = \frac{1}{T} \sqrt{(\sum_{t=k}^T (r_{pk} - r_{Ik})^2 I_{\{rpk < rIk\}})} \quad \text{مدل ۳}$$

St:

$$0.95 \leq \sum_i^n w_i \beta_i^D \leq 1.05 \quad \text{محدودیت ۱}$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad \text{محدودیت ۲}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = k \quad \text{محدودیت ۳}$$

$$X_i \leq y_i \quad \forall i = 1 \dots n \quad \text{محدودیت ۴}$$

$$X_i \geq 0 \quad y_i \in \{0.1\} \quad \forall i = 1 \dots n \quad \text{محدودیت ۵}$$

- 
1. Downside Correlation
  2. Semi variance
  3. Downside Risk Beta

### الگوریتم‌های تکاملی

الگوریتم‌های فرا ابتکاری، جایگاه ویژه‌ای در حل مسائل بهینه‌سازی و به‌ویژه مسائل با ابعاد بزرگ دارند. در این بین، الگوریتم‌های تکاملی که از تکنیک بهینه‌سازی مبتنی بر جمعیت استفاده می‌کنند، بخش مهمی از روش‌های فرا ابتکاری را تشکیل می‌دهند. ایده اولیه الگوریتم‌های تکاملی، استفاده از جمعیت محدود عناصر است که هر یک از آنها نقطه‌ای از فضای جست‌وجو (یک جواب برای مسئله) را مشخص می‌کنند. پس از ایجاد جمعیت اولیه، عملگر جهش<sup>۱</sup> برای توسعه جمعیت و یافتن جواب‌های پراکنده صورت می‌گیرد. سپس، به‌منظور یافتن جواب‌های بهتر و بهینه‌تر از فضای جست‌وجو، با استفاده از عملگر تقاطع<sup>۲</sup>، جواب‌ها با هم ترکیب می‌شوند. در نهایت بر اساس میزان برآزش<sup>۳</sup>، انتخاب<sup>۴</sup> بین جواب‌های موجود در جمعیت برای راه‌یابی به نسل بعدی انجام می‌شود. در این پژوهش از دو الگوریتم ژنتیک و تکامل دیفرانسیلی برای حل مسئله استفاده شده است.

### الگوریتم ژنتیک

این الگوریتم برای بهینه‌سازی، جست‌وجو و یادگیری ماشین استفاده می‌شود. اساس این الگوریتم قانون تکامل داروین (بقا بهترین) است که می‌گوید: موجودات ضعیف‌تر از بین می‌روند و موجودات قوی‌تر باقی می‌مانند. در واقع تکامل فرایندی است که روی رشته‌ها صورت می‌گیرد، نه روی موجودات زنده‌ای که معرف موجودات رشته است. در واقع، قانون انتخاب طبیعی برای بقا می‌گوید که هر چه امکان تطبیق موجود بیشتر باشد، بقای موجود امکان‌پذیرتر است و احتمال تولید مثل بیشتری برایش وجود دارد. این قانون بر اساس پیوند بین رشته‌ها و عملکرد ساختمان‌های رمزگشایی شده آنها است (رضایی و رنجبران، ۱۳۸۶).

به‌طور خلاصه الگوریتم ژنتیک از عملگرهای زیر تشکیل شده است:

- کدگذاری<sup>۵</sup>: این مرحله شاید مشکل‌ترین مرحله حل مسئله به روش الگوریتم باشد. الگوریتم ژنتیک به جای این که روی پارامترها یا متغیرهای مسئله کار کند، با شکل کدشده آنها سروکار دارد.

---

1. Mutation  
2. Crossover  
3. Fitness  
4. Selection  
5. Encoding

- ارزیابی<sup>۱</sup>: تابع برازندگی از اعمال تبدیل مناسب روی تابع هدف، یعنی تابعی که قرار است بهینه شود، به دست می‌آید. این تابع هر رشته را با یک مقدار عددی که کیفیت آن را مشخص می‌کند، ارزیابی می‌شود. هر چه کیفیت رشته جواب بالاتر باشد، مقدار برازندگی جواب بیشتر است و احتمال مشارکت برای تولید نسل بعدی نیز افزایش خواهد یافت.
- ترکیب<sup>۲</sup>: مهم‌ترین عملگر در الگوریتم ژنتیک، عملگر ترکیب است. ترکیب فرایندی است که در آن نسل قدیمی کروموزوم‌ها با یکدیگر مخلوط و ترکیب می‌شوند تا نسل تازه‌ای از کروموزوم‌ها ایجاد شود. جفت‌هایی که در قسمت انتخاب به‌عنوان والد در نظر گرفته می‌شوند، در این قسمت ژن‌هایشان را با هم مبادله می‌کنند و اعضای جدید به‌وجود می‌آورند. ترکیب در الگوریتم ژنتیک باعث از بین رفتن پراکندگی یا تنوع ژنتیکی جمعیت می‌شود؛ زیرا اجازه می‌دهد ژن‌های خوب یکدیگر را بیابند.
- جهش<sup>۳</sup>: جهش نیز عملگر دیگری است که جواب‌های ممکن دیگری را متولد می‌کند. در الگوریتم ژنتیک بعد از این که یک عضو در جمعیت جدید به‌وجود آمد، هر ژن آن با احتمال جهش، جهش می‌یابد. در جهش ممکن است ژنی از مجموعه ژن‌های جمعیت حذف شود یا ژنی که تا به حال در جمعیت وجود نداشته به آن اضافه شود. جهش یک ژن به‌معنای تغییر آن ژن است و بسته به نوع کدگذاری روش‌های متفاوت جهش استفاده می‌شود.
- رمزگشایی<sup>۴</sup>: رمزگشایی، عکس عمل رمزگذاری است. در این مرحله بعد از این که الگوریتم بهترین جواب را برای مسئله ارائه کرد، لازم است عکس عمل رمزگذاری روی جواب‌ها یا همان عمل رمزگشایی اعمال شود تا بتوانیم نسخه واقعی جواب را به‌وضوح در دست داشته باشیم.

### الگوریتم تکاملی دیفرانسیلی

الگوریتم تکاملی دیفرانسیلی (DE) را استورن و پرایس در سال ۱۹۹۵ میلادی معرفی کردند. الگوریتم تکاملی دیفرانسیلی از قابلیت بسیار زیادی برای حل مسائل بهینه‌سازی محدودیت‌دار برخوردار است و توانایی حل مسائل با توابع هدف غیرخطی و مشتق‌ناپذیر را دارد. مطالعه کاربردهای مختلف الگوریتم تکاملی دیفرانسیلی در حل مسائل گوناگون و مقایسه نتایج این مطالعات نشان می‌دهد، DE در مسائلی که متغیرهای آن از نوع چه مقدار و چه تعداد است،

---

1. Evaluation  
2. Crossover  
3. Mutation  
4. Decoding

عملکرد بهتری دارد. بر اساس مقایسه نتایج با سایر الگوریتم‌های تکاملی و حتی سایر الگوریتم‌های فراابتکاری، DE از لحاظ سرعت دستیابی به جواب خوب با سایر الگوریتم‌ها قابل مقایسه است (استورن و پرایس، ۱۹۹۷). اجزا و مراحل الگوریتم تکاملی دیفرانسیلی عبارت‌اند از: ایجاد جمعیت اولیه<sup>۱</sup>، جهش<sup>۲</sup>، جابه‌جایی<sup>۳</sup>، انتخاب بردار والد و بازمانده برای نسل بعد، شرط توقف الگوریتم.

**ایجاد جمعیت اولیه:** الگوریتم تکامل دیفرانسیلی با ایجاد اولین جمعیت از افراد شروع می‌شود. در صورتی که هیچ اطلاعاتی از مسئله در دست نباشد، جمعیت اولیه معمولاً به صورت تصادفی با توزیع یکنواخت تولید می‌شود و چنانچه جواب اولیه‌ای برای مسئله وجود داشته باشد، جمعیت با افزودن انحرافات تصادفی به جواب اولیه ایجاد می‌شود (گنونی، ایواگنیلو، موسا، مامولو و دی له‌وا، ۲۰۰۳).

**جهش:** عملگر جهش نقش ایجاد تنوع<sup>۴</sup> در جمعیت را برعهده دارد که موجب بهبود عملکرد DE در رسیدن به جواب بهینه خواهد شد. در واقع الگوریتم تکاملی دیفرانسیلی نام خود را از عملگر جهش تفاضلی خویش گرفته است. وقتی جمعیت اولیه تولید شد، DE نسل اول را جهش داده و جمعیتی با NP عضو (به تعداد جمعیت نسل اولیه) تولید می‌کند.

**جابه‌جایی:** عملیات جابه‌جایی در DE به منظور ایجاد جمعیت فرزند از جمعیت آزمایشی به‌کار می‌رود. دو نوع جابه‌جایی در این الگوریتم وجود دارد: جابه‌جایی بینم و جابه‌جایی نمایم. جابه‌جایی بینم یک سری آزمایش‌های مستقل برنولی است که طی آن جمعیت فرزند از جمعیت آزمایشی به‌وجود می‌آید. عملیات جابه‌جایی در واقع تنوع جمعیت را که پس از عملیات جهش به‌وجود آمده، کنترل می‌کند. عملگر جهش، اعضای جمعیت فرزند را به صورت احتمالی انتخاب می‌نماید (استورن و پرایس، ۱۹۹۷؛ گنونی و همکاران، ۲۰۰۳).

**انتخاب:** فرایند انتخاب در DE با الگوریتم‌های تکاملی دیگر متفاوت است. در سایر الگوریتم‌های تکاملی، افراد بازمانده برای نسل بعد به صورت احتمالی انتخاب می‌شوند، اما در الگوریتم تکاملی دیفرانسیلی این انتخاب به شکل انتخاب قطعی<sup>۵</sup> بین بردار والد و بردار فرزند با در

- 
1. Initialization
  2. Mutation
  3. Crossover
  4. Diversity
  5. Dead selection

نظر گرفتن برازش آن دو صورت می‌گیرد. با فرض آن که مسئله حداقل‌سازی است، بر اساس جمعیت فعلی  $P^{(G)}$  و جمعیت موقت که آرایه‌ای از بردارهای آزمایشی است، جمعیت نسل بعدی  $P^{(G+1)}$  ایجاد می‌شود. هر بردار از جمعیت موقت یا آزمایشی با بردار متناظر در جمعیت فعلی، مقایسه می‌شود و فرد (بردار) با برازش بهتر (تابع هزینه کمتر) به جمعیت نسل بعد انتقال می‌یابد. در نتیجه، افراد در نسل بعدی حداقل به خوبی نسل فعلی یا بهتر از آن خواهند بود. از این رویکرد معمولاً به‌عنوان یک انتخاب تورنمنت یاد می‌شود، مزیت اصلی استراتژی یاد شده این است که با ممانعت از انتقال همزمان بردار والد و فرزند به نسل بعد، از کم شدن تنوع جمعیت جلوگیری می‌کند (برگلی و راگدال، ۲۰۰۵).

هر یک از اجزا و عملگرها در DE در بردارنده پارامتری است که به‌منظور کسب نتایج بهتر از این الگوریتم، به تنظیم مناسب نیاز دارد. برای تنظیم پارامترها در DE باید به این نکته توجه کرد که پارامتر جهش از حساسیت بسیار بیشتری نسبت به پارامتر جابه‌جایی برخوردار است. اندازه جمعیت معمولاً با پارامتر جهش رابطه معکوس دارد. هرچه اندازه جمعیت بزرگ‌تری انتخاب شود، مقدار پارامتر جهش کوچک‌تر، جواب بهتری می‌دهد. در الگوریتم تکاملی دیفرانسیلی معمولاً از روش سعی و خطا برای تنظیم پارامترها استفاده می‌شود و مقادیری که برای شروع جست‌وجو پیشنهاد می‌شوند، عبارت‌اند از: اندازه جمعیت ده برابر تعداد متغیرهای مسئله باشد؛ پارامتر جهش برابر  $0/8$  انتخاب شود؛ پارامتر جابه‌جایی  $0/9$  انتخاب شود. سپس با تغییر این پارامترها به شیوه سعی و خطا، می‌توان به مقدار بهینه دست پیدا کرد. به هر صورت، بسته به نوع مسئله، این تنظیم پارامترها متفاوت است و باید با ترکیب‌های متفاوت از پارامترها و گرفتن نتایج و مقایسه آنها بهترین ترکیب را انتخاب کرد.

## یافته‌های پژوهش

### جمع آوری داده‌ها

تحقیق حاضر بر اساس داده‌های روزانه تعدیل‌شده<sup>۱</sup> تمام شرکت‌های پذیرفته‌شده در بورس اوراق بهادار تهران، از ابتدای سال ۱۳۸۹ تا انتهای سال ۱۳۹۴ و بر اساس محدودیت‌های زیر صورت گرفته است:

- شرکت‌هایی که از فروردین ۱۳۸۹ جزء بورس اوراق بهادار تهران بوده‌اند و تا اسفند ۱۳۹۴ نیز همچنان در فهرست باقی مانده‌اند؛

• اطلاعات مربوط به این شرکتها در کل دوره زمانی در دسترس باشد. از این رو شرکت‌هایی که اطلاعات مربوط به بازده آنها برای تمام این دوره وجود نداشت، حذف شدند؛

• داده شرکت‌هایی که نماد آنها بیش از دو ماه متوالی بسته بود نیز، حذف شدند. بعد از اعمال محدودیت‌های فوق، ۹۳ شرکت برای اجرای پژوهش باقی ماندند. سه‌چهارم از داده‌های دوره زمانی بیان شده برای اجرای مدل‌ها در دوره داخل نمونه و باقی آنها برای اجرای مدل‌ها در دوره خارج از نمونه استفاده شدند. بازده روزانه پرتفوی با استفاده از رابطه ۱۹ به دست آمده است.

$$r_p = \ln \left( \frac{\sum_{t=k}^T W_i p_{it}}{\sum_{t=k}^T W_i p_{i,t-1}} \right) \quad \text{رابطه ۱۹}$$

که در آن،  $W_i$  وزن هر یک از دارایی‌ها و  $p_i$  قیمت هر سهم در زمان  $t$  و  $t-1$  است. همچنین بازده روزانه شاخص ۵۰ شرکت فعال براساس رابطه ۲۰ محاسبه شده است.

$$r_I = \ln \left( \frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \quad \text{رابطه ۲۰}$$

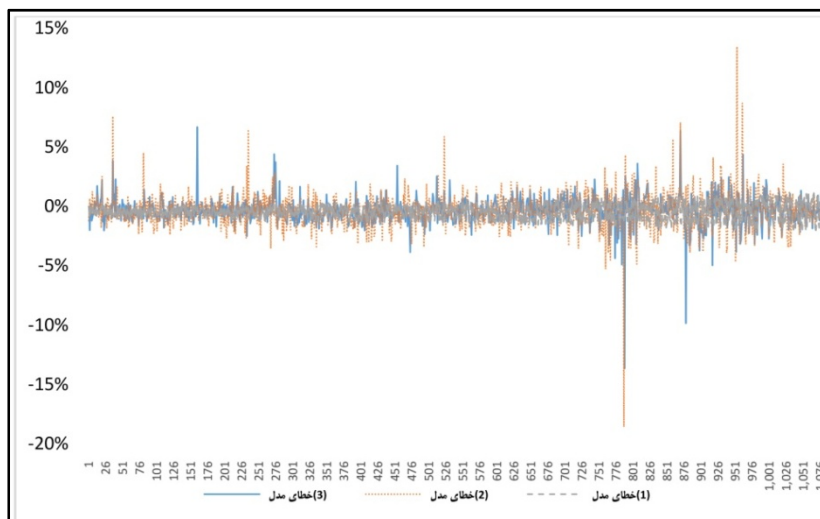
### اجرای مدل

برای کد کردن الگوریتم‌های حل مطرح شده در این پژوهش، از نرم‌افزار MATLAB نسخه 2013 a استفاده شد و این برنامه در رایانه شخصی با مشخصات پردازنده Intel Core2Duo، سرعت ۲/۵۳ GHZ و حافظه کوتاه‌مدت ۴ GB به اجرا درآمد. در ادامه یافته‌های اجرای هر یک از الگوریتم‌ها نشان داده شده است.

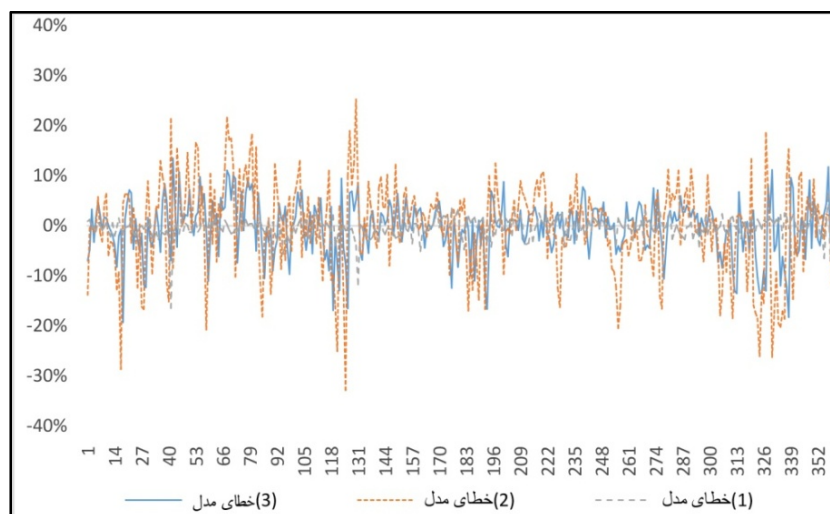
### نتایج اجرای الگوریتم ژنتیک

هدف از اجرای الگوریتم، به دست آوردن وزن‌های بهینه برای تشکیل پرتفوی ردياب شاخص است که کمترین میزان خطای رديابی را داشته باشد. در شکل ۱ خطای رديابی هر یک از مدل‌ها برای داده‌های داخل نمونه در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک آورده شده است.

شکل ۱ نشان می‌دهد خطای رديابی مدل ۱ کمتر از دو مدل دیگر بوده و خطای رديابی مدل ۳ کمتر از مدل ۲ است. همچنین در شکل ۲ خطای رديابی برای داده‌های خارج از نمونه نمایش داده شده است. براساس این شکل خطای رديابی مدل ۳ کمتر از دو مدل دیگر است.



شکل ۱. خطای ردیابی برای داده‌های داخل نمونه در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک



شکل ۲. خطای ردیابی برای داده‌های خارج از نمونه در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک

اتکای صرف به خطای ردیابی می‌تواند گمراه‌کننده باشد، به همین دلیل برای مقایسه این که کدام مدل بهترین عملکرد را دارد، از معیار میانگین بازده به انحراف معیار خطای ردیابی استفاده شده است. بر اساس جدول ۱، در داده‌های درون نمونه مدل ۳ بهترین عملکرد را داشته و در داده‌های خارج از نمونه، مدل‌های ۱ و ۳ عملکرد یکسانی داشته‌اند.

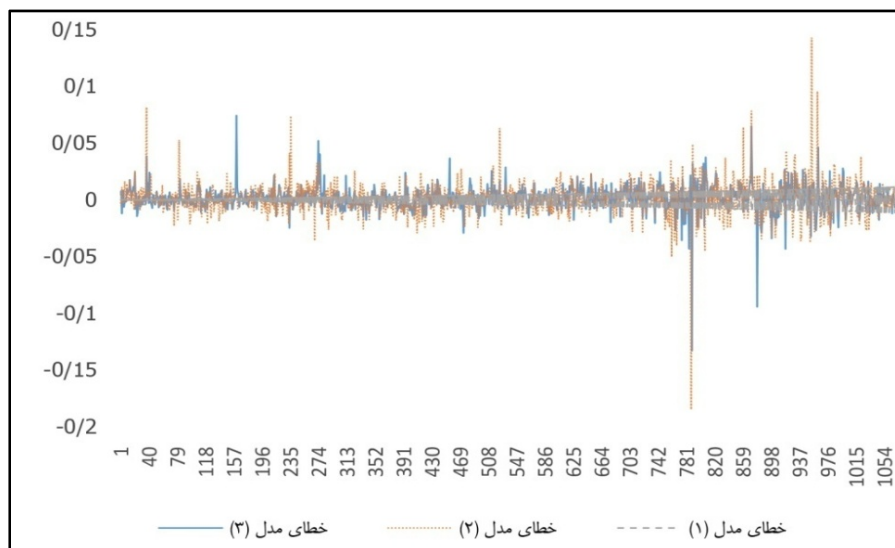


جدول ۱. معیارهای ارزیابی پرتفوی ردياب در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک

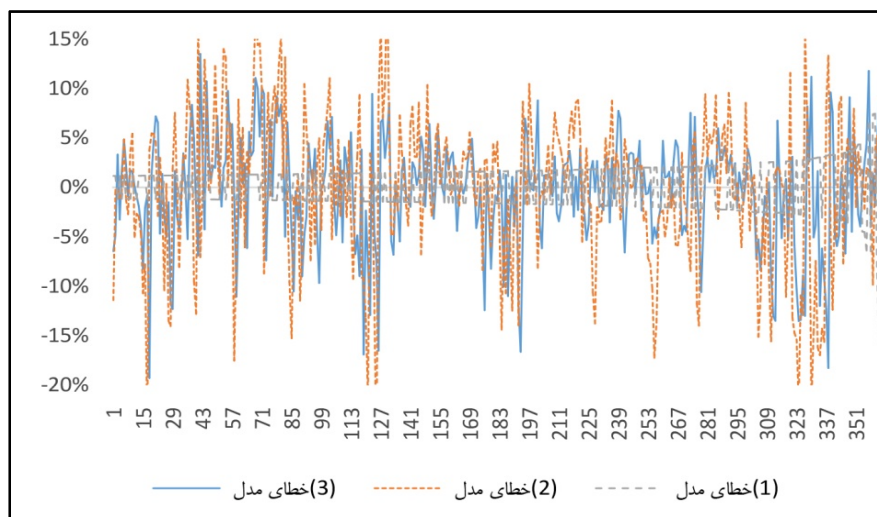
خارج از نمونه			درون نمونه			معیار ارزیابی (درصد)
مدل ۳	مدل ۲	مدل ۱	مدل ۳	مدل ۲	مدل ۱	
۰/۳۹	۰/۳۵	۰/۱۹	۰/۲۴	۰/۱۵	۰/۰۷	میانگین خطا
۵/۴۷	۸/۹۱	۲/۰۲	۱/۶۸	۱/۷۳	۱/۲۸	انحراف معیار خطا
۳/۱۷	۶/۶۸	۳/۴۱	۰/۷۹	۰/۸۶	۰/۶۷	خطای رديابی
۰/۳۴	۰/۱۹	۰/۱۳	۰/۱۲	۰/۱۰	۰/۰۷	میانگین بازده
۶/۳۹	۲/۱۷	۶/۳۹	۷/۱	۵/۷۵	۵/۵۶	میانگین بازده به انحراف معیار خطای رديابی

### نتایج اجرای الگوریتم تکامل دیفرانسیلی

بر اساس شکل ۳ در دوره داخل نمونه خطای رديابی مدل ۱ کمتر از دو مدل دیگر است و مدل ۳ بهتر از مدل ۲ عمل کرده است. همچنین، بر اساس شکل ۴ در دوره خارج از نمونه مدل ۳ عملکرد بهتری نسبت به دو مدل دیگر داشته است.



شکل ۳. خطای رديابی برای داده‌های داخل نمونه در حالت استفاده از الگوریتم تکامل دیفرانسیلی



شکل ۴. خطای ردیابی برای داده‌های خارج از نمونه در حالت استفاده از الگوریتم تکامل دیفرانسیلی

جدول ۲ معیارهای ارزیابی پرتفوی ردیاب در حالت استفاده از الگوریتم تکامل دیفرانسیلی را نشان می‌دهد. بر اساس معیار میانگین بازده به انحراف معیار خطای ردیابی، مدل ۳ در دوره‌های داخل نمونه و خارج از نمونه عملکرد بهتری نسبت به دو مدل دیگر دارد. مدل ۲ نیز از مدل ۱ بهتر عمل کرده است.

جدول ۲. معیارهای ارزیابی پرتفوی ردیاب در حالت استفاده از الگوریتم تکامل دیفرانسیلی

خارج از نمونه			درون نمونه			معیار ارزیابی (درصد)
مدل ۳	مدل ۲	مدل ۱	مدل ۳	مدل ۲	مدل ۱	
۰/۱۳	۰/۳۱	۰/۱۴	۰/۱۲	۰/۱۱	۰/۰۵	میانگین خطا
۲/۲۶	۵/۴۷	۷/۵۱	۱/۴۳	۱/۵۸	۱/۵۱	انحراف معیار خطا
۱/۹۳	۴/۱۸	۵/۶۶	۰/۷۵	۰/۹۸	۰/۴۹	خطای ردیابی
۰/۲۲	۰/۳۳	۰/۱۶	۰/۱۳	۰/۱۰	۰/۰۸	میانگین بازده
۹/۷۲	۶/۱۱	۲/۱۷	۸/۹۸	۶/۰۲	۵/۶۲	میانگین بازده به انحراف معیار خطای ردیابی

### مقایسه نتایج هر دو الگوریتم

جدول ۳ نتایج هر دو الگوریتم را نشان می‌دهد. نتایج الگوریتم تکامل دیفرانسیلی در دوره درون نمونه و خارج از نمونه برای هر سه مدل (به جز مدل ۱ در دوره خارج از نمونه) بهتر از نتایج الگوریتم ژنتیک است.

جدول ۳. جدول مقایسه‌ای نتایج دو الگوریتم ژنتیک و تکامل دیفرانسیلی

دوره	ژن	الگوریتم	میانگین خطا	انحراف معیار خطا	خطای ردیابی	خطای ردیابی	میانگین بازده	میانگین بازده به انحراف معیار خطای ردیابی
درون نمونه	۱	الگوریتم ژنتیک	۰/۰۷	۱/۲۸	۰/۶۷	۰/۰۷	۵/۵۶	
		الگوریتم تکامل دیفرانسیلی	۰/۰۵	۱/۵۱	۰/۴۹	۰/۰۸	۵/۶۲	
	۲	الگوریتم ژنتیک	۰/۱۵	۱/۷۳	۰/۸۶	۰/۱۰	۵/۷۵	
		الگوریتم تکامل دیفرانسیلی	۰/۱۱	۱/۵۸	۰/۹۸	۰/۱۰	۶/۰۲	
	۳	الگوریتم ژنتیک	۰/۲۴	۱/۶۷	۰/۷۹	۱/۱۲	۷/۱۰	
		الگوریتم تکامل دیفرانسیلی	۰/۱۲	۱/۴۳	۰/۷۵	۰/۱۳	۸/۹۸	
خارج از نمونه	۱	الگوریتم ژنتیک	۰/۱۹	۲/۰۲	۳/۴۱	۰/۱۳	۶/۲۹	
		الگوریتم تکامل دیفرانسیلی	۰/۱۴	۷/۵۱	۵/۶۶	۰/۱۶	۲/۱۷	
	۲	الگوریتم ژنتیک	۰/۲۵	۸/۹۱	۶/۶۸	۰/۱۹	۲/۱۷	
		الگوریتم تکامل دیفرانسیلی	۰/۳۱	۵/۴۷	۴/۱۸	۰/۳۳	۶/۱۱	
	۳	الگوریتم ژنتیک	۰/۲۹	۵/۴۷	۳/۱۷	۰/۳۴	۶/۲۹	
		الگوریتم تکامل دیفرانسیلی	۰/۱۳	۲/۲۶	۱/۹۳	۰/۲۲	۹/۷۲	

### نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش ابتدا به روش‌های مختلف ردیابی شاخص پرداخته شد. در اغلب روش‌های معمول ردیابی شاخص، انحرافات مطلوب و نامطلوب از شاخص، یکسان در نظر گرفته می‌شوند. این در حالی است که در متون مالی جدید، عملکرد بهتر مدل‌های مبتنی بر انحرافات نامطلوب در اغلب حوزه‌ها به اثبات رسیده است. به همین دلیل، با استفاده از مدل مبتنی بر انحرافات نامطلوب و توسعه آن، تلاش شد عملکرد پرتفوی ردیاب شاخص بهبود یابد. در توسعه این مدل از بتای استرادا که مبتنی بر انحرافات نامطلوب است، استفاده شد و محدودیت بتا به شرط قراردادن بین ۰/۹۵ تا ۱/۰۵ وارد مدل گردید. بتای پرتفوی هر چه به عدد ۱ نزدیک باشد،

انتظار می‌رود حرکت نوسان‌های بازدهی پرتفوی مطابق شاخص بوده و خطای ردیابی پرتفوی کم شود. به همین دلیل انتظار می‌رفت با وارد کردن بتای نامطلوب در مدل، عملکرد پرتفوی ردیاب شاخص بهبود یابد.

نتایج اجرای مدل‌ها در بازه زمانی داخل نمونه نشان داد در هر دو الگوریتم استفاده‌شده، عملکرد پرتفوی ردیاب شاخص مبتنی بر نوسانات نامطلوب (مدل ۲)، بهتر از پرتفوی ردیاب سنتی (مدل ۱) است. همچنین عملکرد پرتفوی ردیاب شاخص مبتنی بر نوسان‌های نامطلوب که محدودیت بتای نامطلوب نیز به آن اضافه شد (مدل ۳) از دو مدل قبلی بهتر بوده است. در داده‌های خارج از نمونه، عملکرد مدل ۳ بهتر از دو مدل دیگر است. همچنین همواره نتایج به‌دست آمده از الگوریتم تکامل دیفرانسیلی بهتر از نتایج به‌دست آمده از الگوریتم ژنتیک است. با کاراتر شدن بازارهای مالی، اهمیت رویکردهای مدیریت غیرفعال پرتفوی روز به روز افزون‌تر شده و لزوم اجرای پژوهش‌های بیشتر در این زمینه بیشتر احساس می‌شود. در پژوهش آتی، می‌توان بر بهبود عملکرد صندوق‌های شاخصی بهبود یافته با وارد کردن بتای مطلوب و نامطلوب در محدودیت‌ها یا بهبود عملکرد مدل سنتی با مدل کردن بتای مطلوب پرتفوی تمرکز کرد.

## فهرست منابع

- بحرالعلوم، م.م.؛ تهرانی، ر.؛ حنیفی، ف. (۱۳۹۱). طراحی یک الگوریتم فراابتکاری جهت انتخاب پورتفوی بهینه ردیابی‌کننده شاخص بورس تهران. *تحقیقات حسابداری*، ۱۷(۱)، ۴۳-۲۰.
- رضایی، ع.؛ رنجبران، س. (۱۳۸۶). *آموزش الگوریتم ژنتیک در نرم‌افزار متلب*. تهران: انتشارات آذر.
- فلاح‌پور، س.؛ تندنویس، ف. (۱۳۹۴). بهینه‌سازی پرتفوی ردیاب شاخص با استفاده از مدل تک‌شاخصی پایدار بر مبنای شاخص ۵۰ شرکت فعال تر بورس اوراق بهادار تهران. *تحقیقات مالی*، ۶(۲۴)، ۱۳۴-۱۱۵.
- ورسای، م.؛ شمس، ن. (۱۳۸۹). ارائه یک روش حل ابتکاری به‌منظور بهینه‌سازی حل مسئله سید ردیاب شاخص و پیاده‌سازی آن برای اولین بار در بازار سهام تهران. *هشتمین کنفرانس بین‌المللی مدیریت*، تهران، ۲۷ آذر ۱۳۸۹.
- Barro, D. & Canestrelli, E. (2009). Tracking error: a multistage portfolio model. *Annals of Operations Research*, 165(1), 47-66.
- Bahreloloom, M., Tehrani, R. & Hanifi, F. (2012). Designing a heuristic algorithms to select index tracking portfolio. *Accounting Research*, 17(1), 20-43. (in Persian)

- Beasley, J. E., Meade, N. & Chang, T.-J. (2003). An evolutionary heuristic for the index tracking problem. *European Journal of Operational Research*, 148(3), 621-643.
- Bergey, P.K. & Ragsdale, C. (2005). Modified differential evolution: a greedy random strategy for genetic recombination. *Omega*, 33(3), 255-265.
- Canakgoz, N. A. & Beasley, J. E. (2009). Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation. *European Journal of Operational Research*, 196(1), 384-399.
- Cornuejols, G. & Tütüncü, R. (2006). *Optimization methods in finance* (Vol. 5): Cambridge University Press.
- Dose, C. & Cincotti, S. (2005). Clustering of financial time series with application to index and enhanced index tracking portfolio. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 355(1), 145-151.
- Estrada, J. (2002). Systematic risk in emerging markets: the D-CAPM. *Emerging Markets Review*, 3(4), 365-379.
- Fallahpoor, S. & Tondnevis, F. (2015). Index tracking by Single-Index model. *Financial Engineering and Portfolio Management*, 24(6), 115-134. (in Persian)
- Frino, A. & Gallagher, D. R. (2001). Tracking S&P500 index funds. *The journal of portfolio management*, 28(1), 44-55.
- Gao, J. & Li, D. (2013). Optimal cardinality constrained portfolio selection. *Operations research*, 61(3), 745-761.
- Gilli, M. & Këllezzi, E. (2002). The threshold accepting heuristic for index tracking *Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain* (pp. 18-1): Springer.
- Gnoni, M.J., Iavagnilio, R., Mossa, G., Mummolo, G. & Di Leva, A. (2003). Production planning of a multi-site manufacturing system by hybrid modelling: A case study from the automotive industry. *International Journal of production economics*, 85(2), 251-262.
- Jansen, R. & Van Dijk, R. (2002). Optimal benchmark tracking with small portfolios. *The journal of portfolio management*, 28(2), 33-39.
- Konno, H. & Wijayanayake, A. (2000). Minimal Cost Index Tracking under Nonlinear Transaction Costs and Minimal Transaction Unit Constraints. *Tokyo Institute of Technology: CRAFT Working paper*.
- Krink, T., Mittnik, S. & Paterlini, S. (2009). Differential evolution and combinatorial search for constrained index-tracking. *Annals of Operations Research*, 172(1), 153-176.

- Li, Q. Sun, L. & Bao, L. (2011). Enhanced index tracking based on multi-objective immune algorithm. *Expert Systems with Applications*, 38(5), 6101-6106.
- Meade, N. & Salkin, G. R. (1989). Index funds—construction and performance measurement. *Journal of the Operational Research Society*, 40(10), 871-879.
- Oh, K. J., Kim, T. Y. & Min, S. (2005). Using genetic algorithm to support portfolio optimization for index fund management. *Expert Systems with Applications*, 28(2), 371-379.
- Rezayi, A. & Ranjbaran, S. (2008). *Genetic algorithm implementation in MATLAB*. (Vol. 1). Azar press, Tehran. (in Persian)
- Roll, R. (1992). A mean/variance analysis of tracking error. *The Journal of Portfolio Management*, 18(4), 13-22.
- Rudd, A. (1980). Optimal selection of passive portfolios. *Financial Management*, 9(1), 57-66.
- Sharpe, W. F., Alexander, G. J. & Bailey, J. V. (1999). *Investments* (Vol. 6). Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ.
- Storn, R. & Price, K. (1997). Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of global optimization*, 11(4), 341-359.
- Versay, M. & Shams, N. (2010). Using a heuristic method to optimization TEPIX tracking problem. *8th International management Conference*. Tehran, 2010/12/18.
- Xu, F., Lu, Z. & Xu, Z. (2016). An efficient optimization approach for a cardinality-constrained index tracking problem. *Optimization Methods and Software*, 31(2), 258-271.