

## بهینه‌سازی پرتفوی سهام در شرایط مجاز بودن فروش استقراضی و برخی محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه

حمیدرضا قاسمی<sup>۱</sup>، امیرعباس نجفی<sup>۲</sup>

**چکیده:** ممنوعیت فروش استقراضی (نامنفی بودن اوزان دارایی) یکی از فرض‌های اولیه‌ی مدل مارکوویتز است که تنها وضعیت خرید را برای دارایی‌ها ممکن می‌کند. حل مدل کوآدراتیک مارکوویتز با در نظر گرفتن تنها دو محدودیت بازده و بودجه، مرز کارایی نامقید سرمایه‌گذاری را به‌دنبال دارد. در سال‌های گذشته، معرفی سایر محدودیت‌های کاربردی منجر به توسعه‌ی مدل اولیه‌ی مارکوویتز شده‌اند. در پژوهش پیش رو، مدلی نوین برای بهینه‌سازی پرتفو ارائه شده است که افزون‌بر مجاز شمردن فروش استقراضی، برخی محدودیت‌های کاربردی بازار نیز به مدل تحمیل شده است. با استفاده از اطلاعات قیمت ۱۵ سهم، مدل غیرخطی پیشنهادی با به‌کارگیری ابزارهای استاندارد حل شده و مرز کارایی مقید ترسیم شده است.

*واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی پرتفوی، مدل میانگین - واریانس، فروش استقراضی، مرز کارایی، برنامه‌ریزی کوآدراتیک.*

*طبقه‌بندی JEL: G11-C61.*

۱. کارشناس ارشد مهندسی مالی، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران  
۲. استادیار مهندسی صنایع، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۰/۰۹/۱۵

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۱/۰۳/۰۱

نویسنده مسئول مقاله: امیرعباس نجفی

E-mail: aanajafi@kntu.ac.ir

## مقدمه

هدف از حل مسائل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری (پرتفوی) آن است که از بین یک مجموعه دارایی‌های در دسترس، پرتفویی انتخاب شود که افزون‌بر کمینه‌سازی ریسک پرتفوی، یک سطح حداقلی از بازده پرتفوی را نیز برای سرمایه‌گذار برآورده کند. رویکرد حل این‌گونه مسائل آن است که ماکزیمم‌سازی بازده را تنها پارامتر در نظر نگرفته، بلکه تنوع‌بخشی<sup>۱</sup> پرتفوی را نیز به‌منزله‌ی معیار دیگر سرمایه‌گذاری مطرح می‌کند (Hicks, 1935). مدل پایه‌ای مسئله‌ی انتخاب پرتفوی را نخستین‌بار مارکویتز مطرح کرد که یک مدل درجه دوم<sup>۲</sup> بوده و می‌تواند به‌صورت تحلیلی توسط ابزارهای استاندارد حل شود. در این مدل پایه، تنها محدودیت‌های بازده و بودجه در نظر گرفته شده است (Markowitz, 1952). حال چنانچه این مدل به‌ازای مجموعه‌ای از مقادیر مختلف سطح حداقلی بازده پرتفوی، به‌طور مکرر حل شود و در ادامه، نمودار بازده - ریسک پرتفوی به‌ازای جواب‌های مختلف ترسیم شود، به مجموعه نقاطی با عنوان مرز کارا<sup>۳</sup> دست می‌یابیم. با استخراج مرز کارا (به‌منزله‌ی مجموعه جواب بهینه)، سرمایه‌گذار این امکان را خواهد داشت تا بر اساس نیازمندی ریسک / بازده مورد نظر خود، پرتفوی بهینه را از این مجموعه انتخاب کند که این انتخاب به ریسک‌گریزی<sup>۴</sup> و ریسک‌پذیری سرمایه‌گذار بستگی دارد. در ادامه مدل پایه‌ای مارکویتز و برخی توسعه‌های صورت گرفته آن، آورده شده است.

## بیان مسئله

یکی از مباحث نوین بازارهای سرمایه، آن است که سرمایه‌گذار دارایی که در اختیارش نیست را در بازار فروخته و درآمد حاصل از آن را در سایر دارایی‌ها سرمایه‌گذاری می‌کند. به‌گفته‌ی دیگر، دارایی را به امید کاهش قیمت، قرض کرده و در زمان افت قیمت به قرض‌دهنده‌ی دارایی بازمی‌گرداند و از این راه سود می‌کند. این رویکرد با نام فروش استقراضی مطرح است که در ادامه به‌طور گسترده‌تری مورد بحث واقع خواهد شد.

در نوشتار حاضر، مدلی در حوزه‌ی مسائل انتخاب پرتفوی مطرح می‌شود که مجاز بودن فروش استقراضی و اعمال برخی محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه را همراه با هم در نظر می‌گیرد. برتری این مدل آن است که برای پوشش ریسک ناشی از افت قیمت دارایی در آینده، درصدی از بازده بدون ریسک در اختیار قرض‌دهنده‌ی دارایی قرار می‌گیرد که این امر درنهایت

- 
1. Diversification
  2. Quadratic
  3. Efficient Frontier
  4. Risk-aversion

موجب انگیزش و ترغیب سرمایه‌گذاران به خرید و فروش در بازار خواهد شد. مدل ارائه شده با استفاده از داده‌های ۱۵ سهم واقعی حل شده و مرز کارای سرمایه‌گذاری ترسیم و در انتها نتایج آورده شده است.

### پیشینه پژوهش

#### پیشینه نظری (مدل پایه‌ای مارکویتز)

با در نظر گرفتن فروض نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها، بازار کامل بدون مالیات (بدون هزینه‌های معاملاتی)، ممنوعیت فروش استقراری (نامنفی بودن اوزان دارایی) و تقسیم‌پذیر بودن دارایی‌ها، مدل پایه‌ای مارکویتز به شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۱ بیان می‌شود:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \quad \text{رابطه‌ی ۱}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i \geq r_e \quad \text{رابطه‌ی ۲}$$

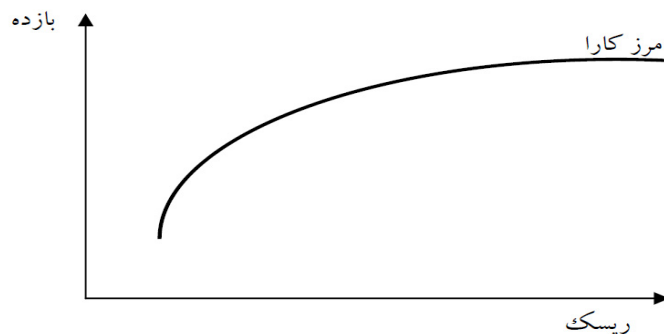
$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad \text{رابطه‌ی ۳}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1 \dots n \quad \text{رابطه‌ی ۴}$$

که در آن؛

$n$ : تعداد دارایی‌ها؛  $x_i$ : نسبت (وزن) سرمایه‌گذاری شده در دارایی  $i$ ام؛  $r_i$ : بازده انتظاری دارایی  $i$ ام؛  $\sigma_{ij}$ : کوواریانس بین بازده دارایی  $i$  و  $j$  است.

در این مدل تابع هدف، واریانس پرتفوی ( $\sigma_p^2$ ) بوده که از رابطه‌ی  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j$  به دست می‌آید. همچنین بازده انتظاری پرتفوی از رابطه‌ی  $\sum_{i=1}^n r_i x_i$  حاصل می‌شود.  $r_e$  نیز بیانگر حداقل بازده انتظاری سرمایه‌گذار از پرتفوی مورد نظر است. محدودیت رابطه‌ی شماره‌ی ۳، اطمینان می‌دهد که مجموع اوزان دارایی بیشتر از یک نمی‌شود. با حل مکرر مسئله‌ی فوق، به‌زای مجموعه‌ای از مقادیر مختلف  $r_e$ ، مرز کارای سرمایه‌گذاری به شکل نمودار شماره‌ی ۱ ترسیم می‌شود. با استفاده از این مرز کارا، سرمایه‌گذار می‌تواند بر اساس نیازمندی‌های ریسک/بازده مورد نظر خود، پرتفوی بهینه را انتخاب کند.



نمودار ۱. مرز کارای سرمایه‌گذاری

ضعف اصلی مدل پایه‌ی مارکوویتز این بود که بسیاری از جنبه‌های معاملاتی دنیای واقعی، همچون پیشینه‌ی (ماکزیمم) اندازه‌ی پرتفوی، کمینه‌ی (مینیمم) سهام و... را در مدل‌سازی مربوطه شرکت نمی‌داد. سایر محققان، این جنبه‌ها را با معرفی محدودیت‌هایی (از نوعی که کاربردی نامیده می‌شوند)، به مدل تحمیل کرده و موجب گسترش آن شدند. برخی از این محدودیت‌های کاربردی در ادامه آورده شده است.

### پیشینه‌ی تجربی

#### محدودیت تعداد سهام پرتفوی

تعداد دارایی‌های موجود در پرتفوی اغلب، یا با یک مقدار داده شده تعیین می‌شوند یا محدود شده هستند. از طریق معرفی یک متغیر دودویی  $z_i$  (که اگر دارایی  $i$  در پرتفوی موجود باشد، مساوی ۱ و در غیر این صورت صفر است)، این محدودیت می‌تواند به شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۵ بیان شود.

$$\sum_{i=1}^n z_i \leq k \quad \text{(رابطه‌ی ۵)}$$

این محدودیت به این منظور تحمیل می‌شود که مدیریت پرتفوی تسهیل شده و هزینه‌های مدیریتی پرتفوی کاهش یابد. شکل نامساوی فوق کاملاً رایج است (Schaerf, 2002; Kellerer & Maringer, 2003; Maringer, 2005)، همچنین یک حد پایین نیز می‌تواند به شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۶ معرفی شود (Di Gaspero et al., 2007; Chiam et al., 2008).

$$k_{min} \leq \sum_{i=1}^n z_i \leq k_{max} \quad (\text{رابطه ی ۶})$$

اگرچه این محدودیت می‌تواند به شکل تساوی نیز بیان شود (Soleimani et al., 2009; Armānanzas & Lozano, 2005); یعنی:

$$\sum_{i=1}^n z_i = k$$

محدودیت تعداد سهام پرتفوی گاهی نیز به‌عنوان تابع هدف در نظر گرفته شده است (Anagnostopoulos & Mamanis, 2010).

### محدودیت‌های سقف و کف

با اعمال این محدودیت‌ها، یک کمینه و بیشینه نسبت (به‌ترتیب  $\varepsilon_i$  و  $\delta_i$ ) برای هر دارایی، مجاز است که در پرتفوی نگهداری شود، به‌طوری که  $x_i = 0, \varepsilon_i \leq x_i \leq \delta_i (i = 1 \dots n)$  بیان دیگر، سهم پرتفوی برای یک دارایی خاص، در یک بازه‌ی داده شده تغییر می‌کند (Chiam et al., 2008):

$$\varepsilon_i z_i \leq x_i \leq \delta_i z_i \quad (\text{رابطه ی ۷})$$

محدودیت‌های سقف (محدودیت‌های حد بالا)، برای جلوگیری از تجاوز بیش از اندازه‌ی نسبت دارایی خاص معرفی می‌شوند و در برخی موارد توسط قوانین و مقررات به مدل تحمیل می‌شوند. محدودیت‌های کف (حد پایین) برای جلوگیری از هزینه‌ی مدیریت نسبت‌های بسیار کم دارایی‌ها به‌کار گرفته می‌شوند و ممکن است توسط هزینه‌های معاملاتی ایجاب شوند. پس چنانچه فروش استقرای ممنوع شود، محدودیت رابطه‌ی شماره‌ی ۴ در مدل پایه‌ای مارکوویتز ( $x_i \geq 0$ ) به‌هنگام تحمیل محدودیت‌های کف، زائد می‌شود.

### فروش استقرای

فرض کنید در زمان  $t$  یک سرمایه‌گذار پیش‌بینی می‌کند که قیمت دارایی  $i$  در زمان آتی افزایش خواهد یافت. برای دستیابی به سود، می‌بایست دارایی  $i$  را به قیمت بازاری  $S_{i,t}$  خریداری کرده و چنانچه  $S_{i,u} > S_{i,t}$  بود، در زمان  $u (u > t)$  آن را فروخته و به‌اندازه‌ی اختلاف  $S_{i,u} - S_{i,t}$  سود کسب کند. به‌طور معکوس اگر در زمان  $t$  سرمایه‌گذار پیش‌بینی کند که قیمت دارایی  $i$  در زمان آتی افت خواهد داشت، او این اختیار را خواهد داشت که اکنون دارایی  $i$  را از کارگزار قرض کرده و به بازار بفروشد و در زمان  $u (u > t)$  آن را خریداری کرده و به همان

کارگزار بازگرداند. در این مورد او به اندازه‌ی  $S_{i,t} - S_{i,t}$  (منهای حق دلالی) سود کسب می‌کند. این راهبرد، فروش استقراضی نامیده می‌شود.

مدل پایه‌ای مارکوویتز، نامنفی بودن اوزان (ممنوعیت فروش استقراضی) را به مدل تحمیل می‌کند. فروش استقراضی را می‌توان با جایگزینی رابطه‌ی شماره‌ی ۸ به جای رابطه‌ی شماره‌ی ۴ در مدل پایه، مجاز کرد:

$$x_i \in R \quad i = 1 \dots n \quad (\text{رابطه‌ی ۸})$$

این مدل به مدل بلک اشاره دارد (Black, 1972) و برای مدل‌سازی فروش استقراضی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از مطالعات انجام گرفته در زمینه‌ی فروش استقراضی، می‌توان به یو و همکاران (۲۰۰۸)؛ رولاند (۱۹۹۷) و کراما و سکینز (۲۰۰۳) اشاره کرد.

چنانچه قرض‌گیرنده‌ی دارایی یک سرمایه‌گذار کوچک باشد، بهره‌ای از درآمدهای فروش استقراضی به دست نمی‌آورد، در غیر این صورت، به‌طور معمول تنها بخشی از بهره ( $h^1$ ) را به دست می‌آورد. برای به‌شمار آوردن تمامی این پدیده‌ها، ابتدا بازده یک پرتفوی، شامل دارایی‌هایی می‌شود که می‌بایست فروش استقراضی نیز در آن تعریف شود:

$$r_p = \sum_{i=1}^n (r_i - h_i \cdot r_c) x_i \quad (\text{رابطه‌ی ۹})$$

$$h_i = 0 \text{ if } x > 0 \quad 0 \leq h_i \leq 1 \text{ otherwise} \quad (\text{رابطه‌ی ۱۰})$$

به‌طوری که  $h$ ، برابر صفر است، اگر سرمایه‌گذار در موقعیت خرید دارایی باشد و مثبت است اگر دارایی فروش استقراضی شود (Jacobs et al., 2005 & 2006).

### مدل پیشنهادی

در این بخش، مدل ارائه‌شده به تفکیک اجزا مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### مفروضات مدل

$N$ : تعداد دارایی‌های در دسترس؛

$\bar{R}_i = E(R_i)$ : بازده انتظاری دارایی  $i$  ام ( $i = 1$  to  $N$ )؛

$\sigma_{ij}$ : کوواریانس بین دارایی‌های  $i$  و  $j$ ؛

$R_e$ : حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار از پرتفوی مورد نظر؛

$R_f$ : بازده بدون ریسک؛

$K$ : بیشینه‌ی تعداد سهام موجود در پرتفوی؛

$X_i$ : وزن دارایی موجود در پرتفوی؛

$\beta_i$  &  $\alpha_i$ : حد پایین و بالای دارایی  $i$  ام در وضعیت خرید؛

$\gamma_i$  &  $\theta_i$ : حد پایین و بالای دارایی  $i$  ام در وضعیت فروش استقراری؛

$h_i$  (Short - rebate): درصد بازگردانی به قرض دهنده‌ی دارایی.

شایان ذکر است، فروض مدل پایه‌ای مارکوویتز، یعنی نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها، بازار کامل بدون مالیات (بدون هزینه‌های معاملاتی) و تقسیم‌پذیر بودن دارایی‌ها، همچنان به‌عنوان فرض‌های اولیه‌ی مدل پیشنهادی پابرجا بوده، با این تفاوت که فروش استقراری در این مدل مجاز شمرده شده است. بنابراین، جامعه‌ی آماری برای آزمون مدل نیز بازار سرمایه‌ای خواهد بود که امکان فروش استقراری در تمامی دارایی‌های آن یا حتی الامکان بخشی از آن بازار، وجود داشته باشد. از این رو، نمونه‌ی آماری مورد نظر می‌بایست از میان آن دسته دارایی‌هایی انتخاب شود که فروش استقراری در آنها مانعی ندارد.

### تابع هدف مدل

تابع هدف در مدل مورد نظر، کمینه‌کردن ریسک پرتفوی (واریانس پرتفوی) در نظر گرفته شده است که به‌شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۱۱ بیان می‌شود:

$$\text{Min} \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \sigma_{ij} \quad (\text{رابطه‌ی ۱۱})$$

### محدودیت‌های مدل

#### محدودیت حداقل بازده مورد انتظار<sup>۱</sup>

با توجه به مجاز بودن فروش استقراری در مدل، برای آنکه صاحب اصلی دارایی که دارایی را به ما قرض داده، بتواند ریسک ناشی از کاهش قیمت آتی آن را پوشش دهد، می‌بایست درصدی از بازده بدون ریسک را در اختیار او قرار دهیم تا انگیزه‌ی انجام فروش استقراری در بازار وجود داشته باشد. با در نظر گرفتن این نکته، محدودیت حداقل بازده مورد انتظار مدل پایه‌ی مارکوویتز (رابطه‌ی شماره‌ی ۲) به‌شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۱۲ بازنویسی خواهد شد:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N \left[ k_i X_i \left( \overline{R}_i - (1 - \delta_i) h_i R_f \right) \right] \geq R_e \quad (\text{رابطه‌ی ۱۲})$$

1. Minimum Desired Expected Return Constraint

که در آن؛  $h_i$  (Short - rebate) درصدی از بازده بدون ریسک است که به قرض‌دهنده‌ی دارایی، به‌ازای هر واحد دارایی می‌دهیم و در بازه‌ی  $[0, 1]$  تغییر می‌کند و می‌تواند به‌صورت قطعی یا تصادفی باشد. متغیرهای  $k_i$  و  $\delta_i$  متغیرهای دودویی (باینری) هستند که در ادامه تعریف شده‌اند.

### محدودیت بودجه<sup>۱</sup>

برای آنکه مجموع دارایی‌ها در پرتفوی برابر کل بودجه‌ی در دسترس باشد، این محدودیت به‌شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۱۳ بیان می‌شود:

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1 \quad \text{رابطه‌ی ۱۳}$$

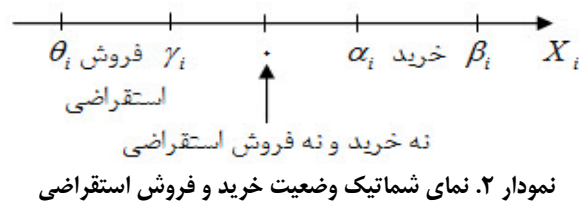
### محدودیت حداکثر فروش استقراضی<sup>۲</sup>

چنانچه بخواهیم به‌اندازه بودجه‌ی در دسترس، حداکثر فروش استقراضی در تمامی دارایی‌ها داشته باشیم، محدودیت رابطه‌ی شماره‌ی ۱۴ به مدل تحمیل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^N |X_i| \leq 2 \quad \text{رابطه‌ی ۱۴}$$

### محدودیت سقف و کف<sup>۳</sup>

در شرایطی که هم خرید و هم فروش استقراضی داشته باشیم و در هر دو حالت، محدودیت سقف و کف در میزان دارایی مورد نظر وجود داشته باشد (برای جلوگیری از تجاوز بیش از حد نسبت دارایی و کاهش هزینه‌های معاملاتی در نسبت‌های کم دارایی)، در هر دو وضعیت خرید و فروش استقراضی، حدود بالا و پایین در نظر گرفته می‌شود که در نمودار شماره‌ی ۲ آورده شده است:



1. Budget Constraint
2. Maximum Short Selling Constraint
3. Floor & Ceiling Constraint



همان طور که در نمودار شماره ۲ مشاهده می‌شود،  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  به ترتیب حدود پایین و بالا در وضعیت خرید ( $0 < \alpha_i < \beta_i$ ) و  $\theta_i$  و  $\gamma_i$  به ترتیب حدود پایین و بالا در وضعیت فروش استقراضی ( $0 < \theta_i < \gamma_i$ ) هستند. گفتنی است چنانچه  $X_i = 0$  باشد، آنگاه در مورد دارایی  $i$  ام، خرید و فروش استقراضی انجام نمی‌دهیم؛ یعنی دارایی  $i$  ام در پرتفوی انتخابی سرمایه‌گذار وجود نخواهد داشت.

با توجه به موارد بیان شده، برای مدل کردن این محدودیت از دو متغیر باینری استفاده شده است که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$k_i \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \delta_i \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$k_i = \begin{cases} 0 & \text{neither Buy nor Short Sell} \\ 1 & \text{Buy or Short Sell} \end{cases}$$

$$\delta_i \begin{cases} 0 & \text{Short Sell} \\ 1 & \text{Buy} \end{cases}$$

با استفاده از دو متغیر فوق، محدودیت سقف و کف را می‌توان به شکل رابطه‌ی شماره‌ی ۱۵ مدل کرد:

$$(\alpha_i \delta_i + \theta_i (1 - \delta_i)) k_i \leq X_i \leq (\beta_i \delta_i + \gamma_i (1 - \delta_i)) k_i \quad \text{رابطه‌ی ۱۵}$$

### محدودیت تعداد دارایی در پرتفوی<sup>۱</sup>

این محدودیت برای مدیریت هرچه بهتر دارایی‌های موجود در پرتفوی به مدل تحمیل می‌شود و از آنجاکه در مدل موردنظر، هدف مدیریت هر دو مورد، دارایی‌های خریداری شده و فروش استقراضی شده است و همچنین با توجه به آنکه متغیر باینری  $k_i$  زمانی برابر ۱ است که دارایی  $i$  ام یا خریداری یا فروش استقراضی می‌شود، بنابراین این محدودیت می‌تواند به یکی از شکل‌هایی که در رابطه‌ی شماره‌ی ۱۶ آمده، بیان شود:

1. Cardinality Constraint

$$\sum_{i=1}^N k_i \leq K \quad \text{or} \quad \sum_{i=1}^N k_i = K \quad \text{or} \quad K_{min} \leq \sum_{i=1}^N k_i \leq K_{max} \quad (\text{رابطه ی ۱۶})$$

در مدل پیشنهادی، تنها حد بالا برای تعداد دارایی‌های پرتفوی در نظر گرفته شده است.  
( $K_{max} = 10$ ).

### محدودیت حفظ تنوع بخشی پرتفوی<sup>۱</sup>

برای حفظ تنوع بخشی پرتفوی، فرض می‌شود که تمامی نسبت دارایی‌های موجود در پرتفوی، در فاصله ی  $[-1, 1]$  قرار دارند، یعنی:  $X_i \in [-1, 1]$ .

$$-1 \leq X_i \leq 1 \quad (\text{رابطه ی ۱۷})$$

با توجه به موارد ذکر شده، مدل پیشنهادی نهایی به شکل رابطه ی شماره ی ۱۸ خواهد بود:

$$\text{Min} \sigma_p^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (\text{رابطه ی ۱۸})$$

Subject to:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N [k_i X_i (\bar{R}_i - (1 - \delta_i) h_i R_f)] \geq R_e$$

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^N |X_i| \leq 2$$

$$(\alpha_i \delta_i + \theta_i (1 - \delta_i)) k_i \leq X_i \leq (\beta_i \delta_i + \gamma_i (1 - \delta_i)) k_i$$

$$\sum_{i=1}^N k_i \leq 10$$

$$-1 \leq X_i \leq 1$$

### یافته‌های پژوهش (مطالعه ی موردی)

از آنجاکه در حال حاضر امکان فروش استقراری در بازار بورس ایران وجود ندارد، بنابراین بازار بورس نیویورک، به عنوان جامعه ی آماری برای آزمون مدل پیشنهادی مورد استفاده قرار گرفته

است. با استفاده از داده‌های به‌دست آمده<sup>۱</sup> برای ۱۵ سهم در یک دوره‌ی زمانی ۵۸۶ روزه (۲۰۰۹/۱/۱ الی ۲۰۱۱/۲/۱)، اطلاعات بازده، واریانس و کوواریانس بین سهام استخراج شده که در جدول شماره‌ی ۱ ارائه شده است. گفتنی است که پارامترهای حدود بالا و پایین در وضعیت‌های خرید و فروش استقراضی، به‌دلخواه برای تمامی سهام انتخابی، یکسان در نظر گرفته شده است  $(\theta_i, \gamma_i, \alpha_i, \beta_i)$ .

جدول ۱. اطلاعات قیمت ۱۵ سهم برگزیده از تاریخ ۲۰۰۹/۱/۱ تا ۲۰۱۱/۲/۱

نام شرکت	نام اختصاری	میانگین بازده (درصد)	واریانس				
آمازون	AMZN	۰/۲۵۳	۷/۰۱۰	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
آپل	AAPL	۰/۲۴۸	۳/۴۰۲	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
دل	DELL	۰/۰۹۲	۵/۹۳۳	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
ای‌بی	EBAY	۰/۱۷۳	۵/۴۰۰	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
گوگل	GOOG	۰/۱۰۶	۳/۱۷۱	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
اچ‌پی	HP	۰/۲۱۱	۸/۹۷۸	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
اینتل	INTC	۰/۰۹۰	۳/۶۹۷	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
ای‌بی‌ام	IBM	۰/۱۲۴	۱/۹۹۹	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
مایکروسافت	MSFT	۰/۰۵۸	۳/۳۵۳	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
نوکیا	NOK	-۰/۰۵۵	۷/۶۸۱	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
پاناسونیک	PC	۰/۰۱۳	۳/۵۷۲	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
سونی	SNE	۰/۰۷۱	۵/۴۵۷	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
تویوتا	TM	۰/۰۴۸	۳/۲۶۴	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
ياهو	YHOO	۰/۰۸۰	۴/۹۳۱	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-
مک‌دونالد	MCD	۰/۰۴۲	۱/۳۸۲	۰/۷	۰/۱	۰	۰/۶-

نرخ بازده بدون ریسک (Rf)، سالانه ۴ درصد در نظر گرفته شده است که نرخ روزانه‌ی مربوطه، به‌صورت مرکب پیوسته برابر ۰/۰۱۱ خواهد بود.

مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی (INLP)<sup>۲</sup> ارائه شده با استفاده از نرم‌افزار برنامه‌ریزی ریاضی لینگو (۱۱)<sup>۳</sup> برای شش مقدار مختلف پارامتر  $h_i$ ، حل شده که نتایج در جدول شماره‌ی ۲

۱. داده‌ها از تارنمای <http://www.finance.yahoo.com> به‌دست آمده است.

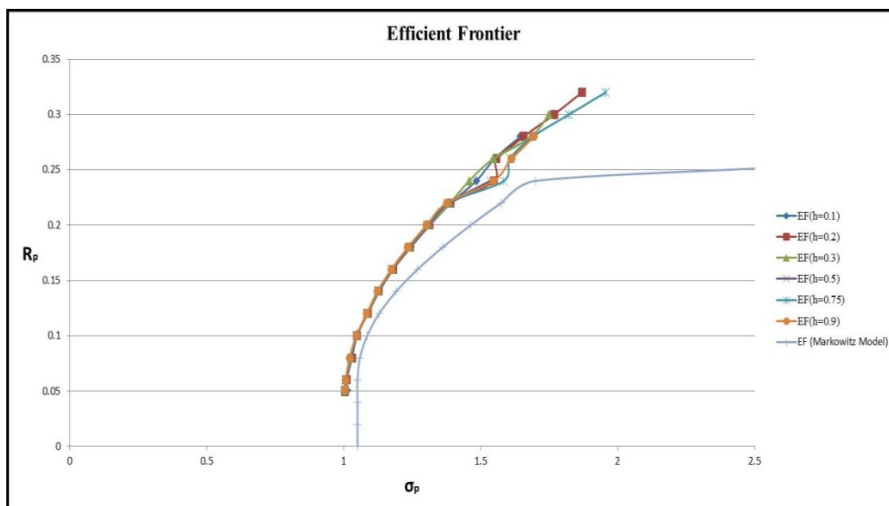
2. Integer Non Linear Programming

3. Lingo Version 11

ارائه شده است. همچنین مرز کارای سرمایه‌گذاری حاصل نیز در نمودار شماره‌ی ۳ نشان داده شده است.

جدول ۲. ریسک (انحراف معیار) و بازده پرتفوی به‌زای مقادیر مختلف حداقل بازده انتظاری پرتفوی و پارامتر  $h_i$

		0		+۰.۲		+۰.۴		+۰.۶		+۰.۸	
	+۰.۱۰	-۰.۴۹	۱/۰.۰۴	-۰.۴۹	۱/۰.۰۴	-۰.۵۱	۱/۰.۱۲	-۰.۶۰	۱/۰.۱۰	-۰.۸۰	۱/۰.۲۶
	+۰.۲۰	-۰.۴۹	۱/۰.۰۴	-۰.۴۹	۱/۰.۰۴	-۰.۴۹	۱/۰.۰۴	-۰.۶۰	۱/۰.۱۰	-۰.۸۰	۱/۰.۳۰
	+۰.۳۰	-۰.۴۹	۱/۰.۰۴	-۰.۵۰	۱/۰.۰۴	-۰.۵۰	۱/۰.۰۴	-۰.۶۰	۱/۰.۰۸	-۰.۸۰	۱/۰.۲۵
	+۰.۵۰	-۰.۵۰	۱/۰.۰۴	-۰.۵۰	۱/۰.۰۴	-۰.۵۰	۱/۰.۰۴	-۰.۶۰	۱/۰.۰۸	-۰.۸۰	۱/۰.۲۹
	+۰.۷۵	-۰.۵۱	۱/۰.۰۴	-۰.۵۱	۱/۰.۰۴	-۰.۵۱	۱/۰.۰۴	-۰.۶۰	۱/۰.۰۷	-۰.۸۰	۱/۰.۲۶
	+۰.۹۰	-۰.۵۲	۱/۰.۰۴	-۰.۵۲	۱/۰.۰۴	-۰.۵۲	۱/۰.۰۴	-۰.۶۰	۱/۰.۰۶	-۰.۸۰	۱/۰.۲۱
		+۰.۱۰		+۰.۱۲		+۰.۱۴		+۰.۱۶		+۰.۱۸	
	+۰.۱۰	-۰.۱۰۰	۱/۰.۴۹	-۰.۱۲۰	۱/۰.۸۸	-۰.۱۴۰	۱/۱.۲۸	-۰.۱۶۰	۱/۱.۸۰	-۰.۱۸۰	۱/۲.۴۴
	+۰.۲۰	-۰.۱۰۰	۱/۰.۴۸	-۰.۱۲۰	۱/۰.۸۸	-۰.۱۴۰	۱/۱.۲۸	-۰.۱۶۰	۱/۱.۸۰	-۰.۱۸۰	۱/۲.۴۳
	+۰.۳۰	-۰.۱۰۰	۱/۰.۴۹	-۰.۱۲۰	۱/۰.۸۷	-۰.۱۴۰	۱/۱.۲۷	-۰.۱۶۰	۱/۱.۷۹	-۰.۱۸۰	۱/۲.۴۲
	+۰.۵۰	-۰.۱۰۰	۱/۰.۴۸	-۰.۱۲۰	۱/۰.۸۵	-۰.۱۴۰	۱/۱.۲۶	-۰.۱۶۰	۱/۱.۷۷	-۰.۱۸۰	۱/۲.۴۰
	+۰.۷۵	-۰.۱۰۰	۱/۰.۴۶	-۰.۱۲۰	۱/۰.۸۴	-۰.۱۴۰	۱/۱.۲۴	-۰.۱۶۰	۱/۱.۷۵	-۰.۱۸۰	۱/۲.۳۶
	+۰.۹۰	-۰.۱۰۰	۱/۰.۴۵	-۰.۱۲۰	۱/۰.۸۴	-۰.۱۴۰	۱/۱.۲۳	-۰.۱۶۰	۱/۱.۷۳	-۰.۱۸۰	۱/۲.۳۴
		+۰.۲۰		+۰.۲۲		+۰.۲۴		...			
	+۰.۱۰	-۰.۲۰۰	۱/۳.۱۴	-۰.۲۲۰	۱/۳.۹۱	-۰.۲۴۰	۱/۴.۸۳	...	...		
	+۰.۲۰	-۰.۲۰۰	۱/۳.۱۳	-۰.۲۲۰	۱/۳.۸۹	-۰.۲۴۰	۱/۵.۴۹	...	...		
	+۰.۳۰	-۰.۲۰۰	۱/۳.۱۱	-۰.۲۲۰	۱/۳.۸۷	-۰.۲۴۰	۱/۴.۵۸	...	...		
	+۰.۵۰	-۰.۲۰۰	۱/۳.۰۸	-۰.۲۲۰	۱/۳.۸۴	-۰.۲۴۰	۱/۵.۳۴	...	...		
	+۰.۷۵	-۰.۲۰۰	۱/۳.۰۵	-۰.۲۲۰	۱/۳.۷۹	-۰.۲۴۰	۱/۵.۸۵	...	...		
	+۰.۹۰	-۰.۲۰۰	۱/۳.۰۳	-۰.۲۲۰	۱/۳.۷۶	-۰.۲۴۰	۱/۵.۴۷	...	...		



نمودار ۳. مرز کارای سرمایه‌گذاری به‌ازای مقادیر مختلف  $h_i$

همان‌طور که در جدول شماره ۲ مشاهده می‌شود، از چپ به راست با افزایش مقدار بازده انتظاری پرتفوی ( $R_e$ )، ریسک پرتفوی (انحراف معیار پرتفوی  $\sigma_p$ ) نیز به‌ازای تمامی مقادیر  $h_i$  افزایش می‌یابد (ارتباط مستقیم). همچنین برای مقادیر پایین ( $R_e$ )، با افزایش مقدار  $h_i$  از بالا به پایین، مقادیر ریسک پرتفوی بدون تغییر باقی‌مانده است، در حالی که برای مقادیر بالاتر ( $R_e$ )، روند نزولی را طی می‌کند (ارتباط معکوس). برای مقایسه‌ی مرز کارای مدل پیشنهادی و مرز کارای مدل پایه‌ای مارکوویتز، بار دیگر نمودار شماره ۳ را در نظر بگیرید. همان‌طور که انتظار می‌رفت، مرز کارای مدل پیشنهادی بالاتر از مرز کارای مدل مارکوویتز قرار گرفته است. علت این امر آن است که در مدل پایه‌ای مارکوویتز، حداکثر مقدار بازده پرتفوی برابر با بالاترین بازده دارایی‌های در دسترس (آمازون با میانگین بازده ۰/۲۵۳) خواهد بود، در حالی که در مدل پیشنهادی با توجه به مجاز شمردن فروش استقراسی، می‌توان انتظار دست‌یابی به بازده پرتفوی بیشتر از مقدار ۰/۲۵۳ را نیز داشت.

### نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله یک مدل تک‌هدفه (کمینه‌سازی واریانس پرتفوی) پیشنهاد شده است، که تصمیم‌گیری در خصوص سه وضعیت (خرید، فروش استقراسی، نه خرید و نه فروش) هر دارایی را برای سرمایه‌گذار به‌دنبال دارد. افزون‌بر محدودیت‌های مدل اولیه‌ی مارکوویتز (بازده و بودجه)،

برخی محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه (حداکثر میزان فروش استقراسی، حداکثر تعداد دارایی در پرتفوی، حد بالا و پایین هر دارایی، حفظ تنوع بخشی پرتفوی) نیز به مدل تحمیل شده است. برای ایجاد انگیزش در خصوص انجام فروش استقراسی و جلوگیری از تضرر قرض‌دهنده‌ی دارایی، پارامتر  $h_i$  جهت پوشش ریسک، اعمال شده است. با حل مدل، مشخص شد که ریسک و بازده پرتفوی ارتباط مستقیم داشته، در حالی که ریسک و مقدار  $h_i$  ارتباط معکوس دارند. همچنین در مدل پیشنهادی با توجه به مجاز بودن فروش استقراسی، می‌توان انتظار دستیابی به بازده پرتفوی بیشتر از بالاترین بازده دارایی‌های در دسترس را نیز داشت. با به‌وجود آمدن سازوکار فروش استقراسی در بازار بورس اوراق بهادار، مدل ارائه‌شده قابلیت استفاده برای انتخاب پرتفوی بهینه برای سرمایه‌گذاران داخلی را نیز خواهد داشت. با توجه به مطالب بیان‌شده، برخی زمینه‌ها برای مطالعات بعدی به شرح زیر پیشنهاد شده است:

- استفاده از سایر محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه برای توسعه‌ی مدل؛
- استفاده از سایر مقیاس‌های ریسک، همچون نیم‌واریانس (SVAR)، ارزش در معرض ریسک (VaR) و... به‌عنوان تابع هدف مدل پیشنهادی؛
- حل مدل با در نظرگیری چند هدف؛
- استفاده از تئوری فازی در مدل‌سازی مدل پیشنهادی.

## منابع

1. Anagnostopoulos, K.P. and Mamanis, G. (2010). A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables. *Computers & Operations Research*, 37: 1285–1297.
2. Armánanzas, R. and Lozano, J.A. (2005). A multiobjective approach to the portfolio optimization problem. *In Proceedings of the 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 1388–1395.
3. Black, F. (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, 45 (3): 444-455.
4. Chiam, S. C., Tan, K. C., and Al Mamum, A. (2008). Evolutionary multi-objective portfolio optimization in practical context. *International Journal of Automation and Computing*, 5 (1): 67-80.

5. Crama, Y., and Schyns, M. (2003). Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *European Journal of Operational Research*, 150: 546-571.
6. Di Gaspero, L., Di Tollo, G., Roli, A. and Schaerf, A. (2007). Hybrid local search for constrained financial portfolio selection problems. *In Proceedings of Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems*, 44–58.
7. Hicks, J.R. (1935). A suggestion for simplifying the theory of money. *Economics*, 2: 1–19.
8. Jacobs, B., Levy, K.N. and Markowitz, H. (2005). Portfolio optimization with factors, scenarios and realistic short positions. *Operations Research*, 53 (4): 586-599.
9. Jacobs, B., Levy, K.N. and Markowitz, H. (2006). Trimability and fast optimization of long-short portfolios. *Financial Analysts Journal*, 62 (2): 36-46.
10. Kellerer, H. and Maringer, D. (2003). Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm. *OR Spectrum*, 25 (4): 481-495.
11. Maringer, D. (2005). *Portfolio Management with Heuristic Optimization*. Springer Verlag.
12. Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7 (1): 77-91.
13. Rolland, E. (1997). A tabu search method for constrained real number search: applications to portfolio selection. *Technical report, Department of Accounting and Management Information Systems*, Ohio State University, Columbus.U.S.A.
14. Schaerf, A. (2002). Local search techniques for constrained portfolio selection problems. *Computational Economics*, 20 (3): 177–190.
15. Soleimani, H., Golmakani, H. and Salimi, M.H. (2009). Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36: 5058-5063.

16. Yu, L., Wang, S., and Lai, K.K. (2008). Neural network-based mean–variance–skewness model for portfolio selection. *Computers & Operations Research*, 35 (1): 34-46.